	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ____________________ **Assinatura do Aluno:** ____________________ **Prova Escrita Nº 1 Turma V1/V3 02/2009**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição e a imagem da função $y = \sqrt{(x^2 - 2x + 1)} + |x - 1|$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \, sen\left(\dfrac{1}{x}\right)}{sen(x)}$, b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 2}}{\sqrt{2n^2 + n}}\right] \left[\dfrac{n+3}{n+1}\right]^{(n+1)}$.

Questão 3: (Valor 2,0) A função $f(x) = a^x (x^2 + 3x + 1) + 2$ está definida $\forall x \in \text{IR}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Analise a continuidade da função neste domínio.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

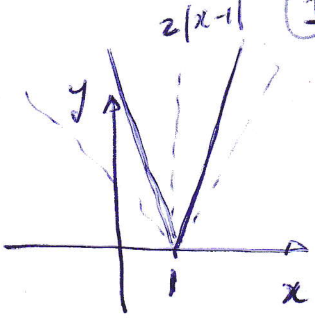
$$f(x) = \frac{\left[2sen(5x)\cos(5x)e^{(2x)}\right]}{\left[x^2 + \frac{1}{2}\ln(2x)\right]}.$$

Questão 5: (Valor 2,0) Seja a função $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definida para todos os reais , onde a, b, c e d são constantes representadas por números reais. Como deve ser escolhido os números a, b, c e d para que $f(x)$ tenha um máximo relativo no ponto $x = -1$ e um mínimo relativo no ponto $x = 1$?

Q1) $y = \sqrt{x^2-2x+1} + |x-1| = \sqrt{(x-1)^2} + |x-1|$

$= |x-1| + |x-1| = 2|x-1| \Rightarrow y = 2|x-1|$

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Img } f = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq 0\}$



Q2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 1 \cdot 0 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$, já que $\operatorname{sen}(x) \sim x,\ x \to 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$, já que $-1 \leq \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq 1$

se $x > 0 \Rightarrow \quad -x \leq x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq x$ e pelo teorema do confronto $\lim\limits_{x\to 0} -x \leq \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq \lim\limits_{x\to 0} x$

se $x < 0 \Rightarrow x = -|x| \Rightarrow \quad |x| \geq -|x| \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \geq -|x|$ ou $-|x| \leq x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq |x|$ e pelo teorema do confronto

$\lim\limits_{x\to 0} -|x| \leq \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \leq \lim\limits_{x\to 0} |x|$.

---

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-n^2+2}}{\sqrt{2n^2+n}} \left[\dfrac{n+3}{n+1}\right]^{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-n^2+2}}{\sqrt{2n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}}{\sqrt{n^2(2+\frac{1}{n})}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{1-0+0}}{\sqrt{2+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+3}{n+1}\right]^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1+2}{n+1}\right]^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{n+1}\right]^{n+1}$$

Se $\frac{2}{n+1}=\frac{1}{m} \Rightarrow n+1=2m$ e quando $n\to\infty$, $m\to\infty$,

Logo $$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{n+1}\right]^{n+1}=\lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{1}{m}\right]^{2m}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{m}\right]^{m}\right\}^{2}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)=e^{2}.$$

---

3) $f(x)=a^{x}(x^2+3x+1)+2$

$$\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=a^{(x_0+\Delta x)}\left[(x_0+\Delta x)^2+3(x_0+\Delta x)+1\right]+2-a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)-2$$

$$=a^{x_0}a^{\Delta x}\left[x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+3x_0+3\Delta x+1\right]-a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)$$

$$=a^{x_0}a^{\Delta x}\left[(x_0^2+3x_0+1)+(\Delta x)^2+(2x_0+3)\Delta x\right]-a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)$$

$$=\underbrace{a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)\left[a^{\Delta x}-1\right]}_{A}+\underbrace{a^{x_0}a^{\Delta x}\cdot\Delta x\left[\Delta x+(2x_0+3)\right]}_{B}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(A+B)=\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)\left[a^{\Delta x}-1\right]+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}a^{\Delta x}\cdot\Delta x\left[\Delta x+(2x_0+3)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\left[a^{\Delta x}-1\right]}_{\to 0}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}a^{\Delta x}\cdot\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x+(2x_0+3)\right]=$$

$$=a^{x_0}(x_0^2+3x_0+1)\cdot 0+a^{x_0}\cdot 1\cdot 0\cdot\left[0+2x_0+3\right]=0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$$

Logo a $f(x)$ é contínua $\forall x\in\mathbb{R}$, já que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

Q4) $f(x) = \dfrac{\left[2\,\text{sen}(5x)\cos(5x)\,e^{(2x)}\right]}{\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right]} = \dfrac{\underbrace{\text{sen}(10x)\,e^{(2x)}}_{f_1}}{\underbrace{\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right]}_{f_2}}$ ②

$$f_1(x) = \text{sen}(10x)\,e^{(2x)}, \quad f_2(x) = x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)$$

$$df = \frac{df}{dx}\cdot dx, \quad \frac{df}{dx} = \frac{f_1'(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(\text{sen}(10x)\right)e^{(2x)} + \text{sen}(10x)\frac{d}{dx}\left(e^{(2x)}\right)$$

$$= \cos(10x)\cdot\frac{d}{dx}(10x)\,e^{(2x)} + \text{sen}(10x)\,e^{(2x)}\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 10\cos(10x)\,e^{2x} + 2\,\text{sen}(10x)\,e^{(2x)} = 2e^{(2x)}\left[5\cos(10x)+\text{sen}(10x)\right]$$

$$f_2'(x) = (x^2)' + \frac{1}{2}\left(\ln(2x)\right)' = 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{2x}(2x)' = 2x+\frac{1}{2x} = \frac{4x^2+1}{2x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2e^{(2x)}\left[5\cos(10x)+\text{sen}(10x)\right]\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right] - \text{sen}(10x)\,e^{(2x)}\,\frac{4x^2+1}{2x}}{\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right]^2}$$

$$df = \left\{\frac{2e^{(2x)}\left[5\cos(10x)+\text{sen}(10x)\right]\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right] - \text{sen}(10x)\,e^{(2x)}\,\frac{(4x^2+1)}{2x}}{\left[x^2+\frac{1}{2}\ln(2x)\right]^2}\right\}dx$$

Q5) $y = ax^3+bx^2+cx+d.$

$y(x=-1)$ máximo relativo

$y(x=1)$ mínimo relativo

C.N. $y'=0$

$y' = 3ax^2+2bx+c = 0 \Rightarrow$ $3a(-1)^2+2b(-1)+c=0$, $3a(1)^2+2b(1)+c=0$

$3a-2b+c=0$ ①

$3a+2b+c=0$ ② $\Rightarrow 4b=0 \Rightarrow b=0$

C.S. $y''<0$ máximo relativo

$y''>0$ mínimo relativo

$y'' = (y')' = (3ax^2 + 2bx + c)' = 6ax + 2b$

$y''(x=-1) = 6a(-1) + 2b < 0$ (3)

$y''(x=1) = 6a(1) + 2b > 0$ (4)

$-6a + 2b < 0$ (3)

$6a + 2b > 0$ (4)

$6a + 2c = 0$ (1)

$3a + 2b + c = 0$ (2) $\Rightarrow b = 0$

$-6a + 2b < 0$ (3)

$6a + 2b > 0$ (4)

$b = 0$ (2)

$6a + 2c = 0$ (1) $\Rightarrow c = -3a$

$\left.\begin{array}{ll} -6a < 0 & (3) \Rightarrow a > 0 \\ 6a > 0 & (4) \Rightarrow a > 0 \end{array}\right\}$.

Logo, $a > 0$, $b = 0$, $c < 0$ e $c = -3a$ e d é qualquer número real.