UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): Vitor Nepomuceno Silva
Assinatura do Aluno: ______________________
Prova Escrita Nº 1 Turma V2 01/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,0) Sabendo que $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ determine o domínio de definição e a imagem da função $y=cth(x)=\dfrac{ch(x)}{sh(x)}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5n^3+4}{5n^3+3}\right]^{(5n^3+3)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{|sen(x)|}{x}\right].$$

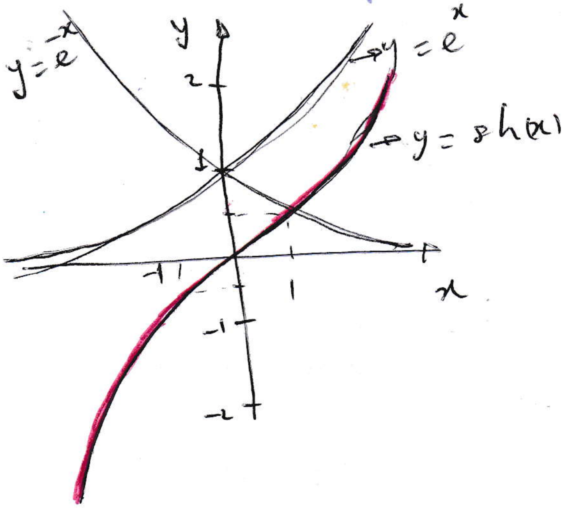
Questão 3: (Valor 2,0) Mostre que a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 1 & \text{se } x=1\end{cases}$ é descontinua em $x=1$ e continua para os restantes números reais.

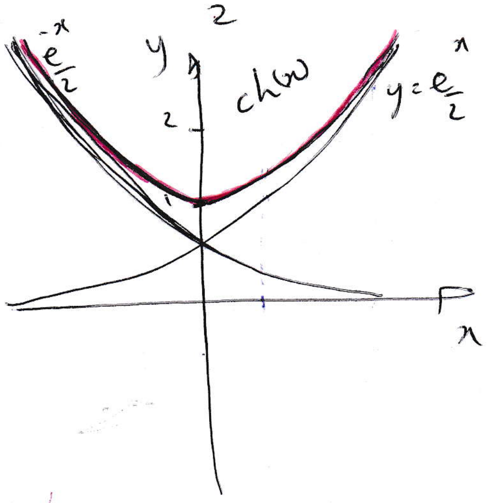
Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

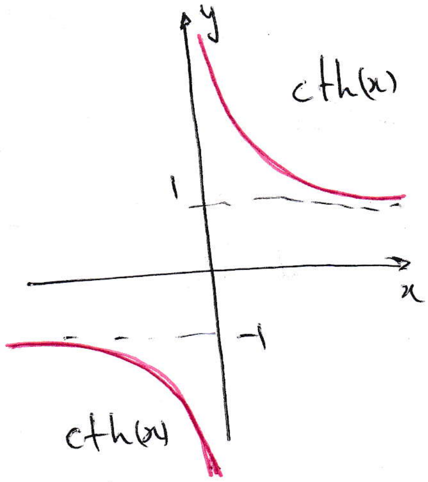
$f(x)=(ax+b)^{(x)}+a^{sen(x)}$, onde $a\in\Re$ e $b\in\Re$, a > 1.

Questão 5: (Valor 2,0) A função $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ no intervalo $x\in[-1,1]$ possui um extremo relativo. Encontre o extremo relativo e determine também os extremos absolutos neste intervalo.

1) Domínio e imagem da $y = cth(x) = \frac{ch\,x}{sh\,x}$, sabendo que $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.







Como o domínio de $sh(x)$ é $\{x \in \mathbb{R}\}$ e também do $ch(x)$ segue que o domínio do $cth(x)$ é $\{x \in \mathbb{R}\}$ tirando o ponto onde $sh(x)$ se anula, ou seja, $\text{Dom } cth(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\}$

$$cth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{1 - e^{-2x}} + \frac{1}{e^{2x} - 1}$$

, note que desta forma podemos perceber claramente que que se $x = 0$ a função não está definida, e que se $x \to 0^+$ $x = \frac{1}{p}$, $p \gg 1$ e $cth(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{+\frac{2}{p}}}} + \frac{1}{e^{\frac{2}{p}} - 1}$ como $e^{\frac{2}{p}} > 1$ se $p > 0$ temos que $e^{\frac{2}{p}} \to 1^+$ quando $p \to \infty$ e $cth(x) \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Quando $x \to +\infty$ segue que $cth(x) \to 1$. Quando $x \to 0^-$, $x = -\frac{1}{p}$, $p \gg 1$ e

$$cth(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{2}{p}}} + \frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{2}{p}}} - 1}$$

e $cth(x) \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Quando $x \to -\infty$ segue que $cth(x) \to -1$. Logo a imagem do $cth(x)$ é $\{y \in \mathbb{R} \,/\, -\infty < y < -1 \text{ e } 1 < y < +\infty\}$.

2)

a) $L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{5n^3+4}{5n^3+3}\right]^{(5n^3+3)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+3+1}{5n^3+3}\right)^{(5n^3+3)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left[1+\frac{1}{5n^3+3}\right]^{5n^3+3}$, $m = 5n^3+3$ segue que

quando $n\to\infty$, $m\to\infty$ e temos:

$L = \lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{1}{m}\right]^m = e$.

b) $L = \lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ este limite não existe porque

sabendo que $\operatorname{sen}(x) \sim x$ quando $x\to 0$ trocando os infinitessimos temos:

$L = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} sg(x)$ que tem limites laterais

diferentes $\lim_{x\to 0^+} sg(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} sg(x) = -1$.

---

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{se } x\neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1\end{cases}$

- ~~des~~continuidade em $x=1$:

1) $f(x=1) = 1$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = 3$

3) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 \neq f(x=1) = 1$, portanto em $x=1$ $f(x)$ é descontínua

- continuidade para os restantes $x\in\mathbb{R}$. $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$:

$\Delta y = \frac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 2}{(x+\Delta x)-1} - \frac{x^2+x-2}{x-1}$

$= \frac{(x-1)\left[(x+\Delta x)^2 + x+\Delta x - 2\right] - (x+\Delta x-1)\left[x^2+x-2\right]}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

$$\frac{x^2\Delta x + x\Delta x^2 - 2x\Delta x + \Delta x}{(x-1)(x-1+\Delta x)} = \frac{\Delta x[x^2 + x\Delta x - 2x + 1]}{(x-1)(x-1+\Delta x)}$$

$$= \frac{\Delta x[(x-1)^2 + x\Delta x]}{(x-1)(x-1+\Delta x)}$$ Logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x-1)^2 + x\Delta x]}{(x-1)(x-1+\Delta x)} = \frac{0 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^2} = 0.$$

portanto $f(x)$ é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$ e descontínua em $x=1$.

---

4) $f(x) = \underbrace{(ax+b)^x}_{f_1} + \underbrace{a^{\operatorname{sen}(x)}}_{f_2}$, $a>1$ $\quad df = \frac{df}{dx}dx$?

$\frac{df_1}{dx}$ através da derivada logarítmica. $f_1 = (ax+b)^x$

$\ln f_1 = \ln(ax+b)^x = x\ln(ax+b)$ que derivando obtemos:

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx} = [x\ln(ax+b)]' = x'\ln(ax+b) + x\underbrace{[\ln(ax+b)]'}_{\text{regra da cadeia}}$$

$$\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx} = \ln(ax+b) + \frac{x \cdot a}{(ax+b)}$$ logo

$$\frac{df_1}{dx} = (ax+b)^x\left[\ln(ax+b) + \frac{ax}{ax+b}\right].$$

$f_2 = a^{\operatorname{sen} x}$, $u = \operatorname{sen} x$, $f_2 = a^{u(x)}$ regra da cadeia.

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{df_2}{du}\frac{du}{dx} = a^{u(x)}\ln(a)\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = a^{\operatorname{sen} x}\ln(a)\cos x$$ logo.

$$df = \left[\frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}\right]dx = \left\{(ax+b)^x\left[\ln(ax+b) + \frac{ax}{ax+b}\right] + a^{\operatorname{sen} x}\ln(a)\cos x\right\}dx$$

---

5) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ extremos relativos e absolutos em $[-1,1]$.

- Extremos relativos:

· condição necessária $\frac{df}{dx} = 0$.

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}[(e^x)' + (e^{-x})'] = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}] = 0$$

$e^{x} = e^{-x}$ ou $e^{2x} = 1$ logo $x = 0$.

- condição suficiente: $\dfrac{d^2f}{dx^2} = \begin{cases} <0 & \text{máximo} \\ >0 & \text{mínimo} \end{cases}$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \left[\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[(e^{x})' - (e^{-x})'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]$$

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}\left[e^{0} + e^{-0}\right] = \frac{2}{2} = 1 > 0$$ logo em

$x = 0$ a função possui um mínimo relativo.

$$f(x=0) = \frac{1}{2}\left[e^{0} + e^{-0}\right] = 1.$$

- Extremos absolutos:

$$f(x=-1) = \frac{1}{2}\left[e^{-1} + e^{+1}\right] = \frac{1}{2}\left[e + \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^2+1}{e}\right] > 1$$

$$f(x=1) = \frac{1}{2}\left[e + e^{-1}\right] = \frac{1}{2}\left[e + \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{e^2+1}{e} > 1$$

Portanto o mínimo absoluto coincide com o mínimo relativo e é alcançado no ponto $x=0$. O máximo absoluto é alcançado nos pontos $x=1$ e $x=-1$, ou seja nos extremos do intervalo.