	UFF – Universidade Federal Fluminense Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda Disciplina: Cálculo I Prof. Gustavo Benitez Alvarez Nome do Aluno (letra forma): ______________________ Assinatura do Aluno: ______________________ **Prova Escrita Nº 1 Turma V2 01/2008**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**
- *Seja o mais explícito possível para responder as questões;*

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição e a imagem da função $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2 sen(\frac{1}{x})}{sen(x)}\right]$,   b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^3-n+3}{5n^3+2n^2+1}\right]\left[\dfrac{n+2}{n+1}\right]^{(n+1)(n+1)}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+a} + \dfrac{sen2x}{x} + \left(\dfrac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2+e^b, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Como devem ser escolhido os números "a" e "b" para que a função seja continua em x=0.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$f(x) = sen(x^2)e^{(2x)} + xtg(x)$.

Questão 5: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y = e^x(x^2-4x+4)$ no intervalo $x \in [0, 3]$.

Q1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{1} \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow -1<x<1.$

Logo, Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1<x<1\}$.

Imagem

$x^2<1 \Rightarrow 1-x^2>0$ usando $a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ segue

$0<1-x^2\leq 1 \Rightarrow \sqrt{0}<\sqrt{1-x^2}\leq\sqrt{1}$ ou $0<\sqrt{1-x^2}\leq 1$

$+\infty > \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ ou $1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty$ (1)

- se $x>0$ multiplicando (1) por x segue:

$x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty$ ou $0 \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty \Rightarrow 0 \leq y < +\infty$

- se $x=0 \Rightarrow y=0$.
- se $x<0$ multiplicando (1) por x segue $x=-u, u>0$

$-\infty < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq -u \Rightarrow -\infty < y \leq 0.$ Logo.

Im $f(x) = \{y \in \mathbb{R}\}$

Q2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \overbrace{\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}}^{f(x)} \cdot \overbrace{x \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})}^{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$, já que $\operatorname{sen} x \sim x$, quando $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$, já que: pelo confronto temos

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad (1)$$

se $x > 0$ multiplicando (1) por x segue:

$-x \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$. Tomando o limite pela direita

$$\lim_{x \to 0^+} -x \leq \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^+} x \quad \text{ou}$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

se $x < 0$ multiplicando (1) por $x = -u$, $u > 0$ segue:

$$u \geq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \geq -u \quad \text{ou} \quad -u \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq u.$$

tomando o limite ~~esque~~ pela esquerda segue

$$\lim_{x \to 0^-} x \leq \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^-} -x \quad \text{ou}$$

$0 \leq \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

---

b) $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n^3 - n + 3}{5n^3 + 2n^2 + 1}\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)}{\left(5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{1}{5}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{(n+1)+(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right]^{2(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \left[\left[1 + \frac{1}{n+1}\right]^{n+1}\right]^2 =$$

fazendo $m = n+1 \Rightarrow m \to \infty$ quando $n \to \infty$ logo.

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^2 = e^2.$$ Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^3-n+3}{5n^3+2n^2+1}\right]\left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{2(n+1)} = \frac{1}{5}\cdot e^2 = \frac{e^2}{5}.$$

Q3) i) $f(x=0) = 2+e^b$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+a} = 0$ se $a \neq 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+a} = 1$ se $a = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x+2+x}{4x+2}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x}{4x+2}\right]^{\frac{1}{x}}$$ fazendo $y = \frac{x}{4x+2}$

segue que $y \to 0$ quando $x \to 0$ e $(4x+2)y = x \Rightarrow$

$x[4y-1] = -2y \Rightarrow x = \frac{-2y}{(4y-1)} = \frac{2y}{(1-4y)}$, logo

$$= \lim_{y\to 0}[1+y]^{\left(\frac{1-4y}{2y}\right)} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{2y}}[1+y]^{-2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{y\to 0}[1+y]^{-2} = e^{\frac{1}{2}}\cdot 1^{-2} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0+2+e^{\frac{1}{2}}$ se $a \neq 0$ e

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1+2+e^{\frac{1}{2}}$ se $a = 0$. Para que a função seja contínua em $x=0$ devemos verificar iii)

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x=0)$ logo

$2+e^{\frac{1}{2}} = 2+e^{b}$ se $a \neq 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$3+e^{\frac{1}{2}} = 2+e^{b}$ se $a = 0 \Rightarrow 1+e^{\frac{1}{2}} = e^{b}$ ou

$\ln e^{b} = \ln(1+e^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow b \ln e = \ln(1+e^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow$

$b = \ln(1+e^{\frac{1}{2}})$. Logo a função será contínua em $x=0$ se $b = \frac{1}{2}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se $a=0$ então $b = \ln(1+e^{\frac{1}{2}})$.

Q4) $f(x) = \underbrace{\operatorname{sen}(x^2)\, e^{(2x)}}_{g(x)} + \underbrace{x\, tg(x)}_{h(x)} = g(x) + h(x)$

$g(x) = \underbrace{\operatorname{sen}(x^2)}_{g_1(x)}\ \underbrace{e^{(2x)}}_{g_2(x)}$, $g_1(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, $g_2(x) = e^{(2x)}$.

$g'(x) = g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_1(x) \cdot g_2'(x)$

$g_1'(x) = [\operatorname{sen}(\underbrace{x^2}_{u(x)})]' = [\operatorname{sen}(u(x))]' = \frac{dg_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot 2x$

$= \cos(x^2) \cdot 2x$, $u(x) = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

$g_2'(x) = (e^{\overbrace{(2x)}^{v(x)}})' = (e^{v(x)})' = \frac{dg_2}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^{v(x)} \cdot 2 = 2e^{(2x)}$.

$g'(x) = 2x \cos(x^2)\, e^{(2x)} + \operatorname{sen}(x^2) \cdot 2e^{(2x)}$

$= 2e^{(2x)} [x \cos(x^2) + \operatorname{sen}(x^2)]$

$h(x) = \underbrace{x}_{h_1(x)} \underbrace{tg(x)}_{h_2(x)}$, $h_1(x) = x$, $h_2(x) = tg(x)$.

$h'(x) = h_1'(x)\, h_2(x) + h_1(x) \cdot h_2'(x)$

$h_1'(x) = 1$ e $h_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ logo

$h'(x) = tg(x) + x \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos(x)\,sen(x) + x}{\cos^2 x}$.

$\dfrac{df}{dx} = \left\{ \dfrac{dg}{dx} + \dfrac{dh}{dx} \right\} = \left\{ 2e^{(2x)} \left[x \cos(x^2) + sen(x^2) \right] + \right.$

$\left. + \dfrac{\cos(x)\,sen(x) + x}{\cos^2(x)} \right\}$. logo $df = \dfrac{df}{dx} \cdot dx$

$df = \left\{ 2e^{(2x)} \left[x \cos(x^2) + sen(x^2) \right] + \dfrac{\cos(x)\,sen(x) + x}{\cos^2(x)} \right\} dx$.

Q5) $y = e^x(x^2 - 4x + 4)$, $x \in [0, 3]$

- Extremos relativos

• condição necessaria $y' = 0$ ou y' não existe ⇒ pontos críticos. Como y' existe $\forall x$ resta encontrar $y' = 0$.

$y' = (e^x)'(x^2 - 4x + 4) + e^x(x^2 - 4x + x)'$

$= e^x(x^2 - 4x + 4) + e^x(2x - 4) = e^x[x^2 - 2x] = x e^x (x - 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$, já que $e^x \neq 0$.

• condição suficiente $y'' = \begin{cases} < 0 & \text{máximo relativo} \\ > 0 & \text{mínimo relativo} \end{cases}$

$y'' = (y')' = (e^x)'(x^2 - 2x) + e^x(x^2 - 2x)' = e^x(x^2 - 2x) + e^x(2x - 2)$

$= e^x[x^2 - 2]$

$y''(x_1=0) = e^0(0^2-2) = -2 < 0$ maximo relativo em $x_1 = 0$

$y''(x_2=2) = e^2(2^2-2) = 2e^2 > 0$ mínimo relativo em $x_2 = 2$.

- Extremos absolutos

$y(x=0) = e^0(0^2 - 4 \cdot 0 + 4) = 4$

$y(x=3) = e^3(3^2 - 4 \cdot 3 + 4) = e^3 > 4$

$y(x=2) = e^2(2^2 - 4 \cdot 2 + 4) = e^2 \cdot 0 = 0.$

Logo máximo absoluto é alcançado em $x=3$ e $y = e^3$
o mínimo absoluto é alcançado em $x=2$ e $y = 0$.

Criterios.

Q1) Dominio 1 pto, Imagem 1 pto.

Q2) a) 1 pto b) 1 pto $<^{0,5}_{0,5}$

Q3) i) 0,4 pto, ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \underset{0,4 \times 3}{1,2}$ pto, iii) 0,4 pto

Q4) $\frac{df}{dx} = \underset{0,7 \times 2 + 0,1}{1,5}$ pto, $df = \frac{df}{dx} dx \Rightarrow 0,5$ pto.

Q5) Extremos relativos $1,5 = \underset{0,7+0,7+0,1}{\text{[illegible]}}$, Extremo absoluto 0,5.