	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ____________________________** **Assinatura do Aluno: __________________________________** **Prova Escrita Nº 1 Turma V2 01/2013**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição da função $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{sen(x) - 1}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1 - \cos(x)}{sen(x)} \right]$, b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{5n^3 + 3}{n^3 + 5n^2 + 1} \right] \left[\dfrac{3 + n}{n + 2} \right]^{(n+2)}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é descontinua em $x = 1$ e continua para os restantes números reais.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$f(x) = \dfrac{e^{3x}\, sen(x)}{x}$.

Questão 5: (Valor 2,0) A função $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ no intervalo $x \in$ [-1,1] possui um extremo relativo. Encontre o extremo relativo e determine também os extremos absolutos neste intervalo.

Critérios de Correção

Q1) Restrições do numerador $-0,5$.

Q2) a) 1,0   b) $1,0 = 0,5 + 0,5$

Q3) Descontínua em $x_0 = 1$ 1,0

continua $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x_0 \neq 1$ 1,0

Q4) 0,5 cociente + 0,5 produto + 0,5 cadeia + 0,5 tabela

$-0,5$ df.

Q5) CN 0,7 + CS 0,7 + 0,5 Ex Ab. + 0,1 Detalhes

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$f = 1$,

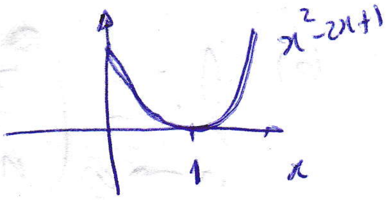
0 ,

Calculo I Prova No 1 01/2013 V2

(Q1) Domínio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{sen(x)-1}$

$x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 0$

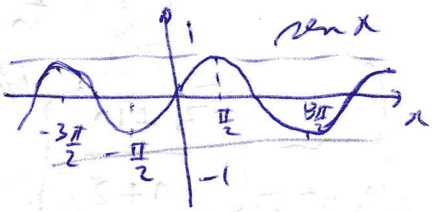
seguem duas possibilidades:



$(x-1) \geq 0$ ou $-(x-1) \geq 0$

$x \geq 1$ ou $x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

ou seja, $x^2-2x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por outra parte,



$sen(x)-1 = 0$ se $sen\, x = 1$

que será satisfeito se

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

$x = -\frac{3\pi}{2} - 2\pi n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

Logo $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ e $x \neq -\frac{3\pi}{2} - 2\pi n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

(Q2) a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1-\cos(x)]}{sen(x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $f_1 = 1-\cos(x)$

$f_2 = sen(x)$

aplicando L'Hôpital segue

$f_1' = [1-\cos(x)]' = 0 - (-sen(x)) = sen\, x$

$f_2' = (sen(x)]' = \cos(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1'}{f_2'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 0 \quad \text{não indeterminado}$$

Logo $\lim_{x \to 0} \frac{f_1}{f_2} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1'}{f_2'} = 0.$

b) $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{5\cancel{n}^3+3}{n^3+5n^2+1} \right] = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3\left[5 + \frac{3}{n^3}\right]}{n^3\left[1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right]}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left[5 + \frac{3}{n^3}\right]}{\left[1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}\right]} = \frac{5+0}{1+0+0} = 5$$

$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{3+n}{n+2} \right]^{(n+2)}$ se fazemos $m = n+2$ segue que $\lim_{n \to \infty} m = \lim_{\cancel{m} \to \infty} n+2 = \infty$ logo

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1+n+2}{n+2} \right]^{(n+2)} = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{1+m}{m} \right]^m$$

$= \lim_{m \to \infty} \left[1 + \frac{1}{m} \right]^m = e$. Portanto

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{5n^3+3}{n^3+5n^2+1} \right] \left[\frac{3+n}{n+2} \right]^{(n+2)} = 5 \cdot e .$$

Q3) para $x = 1$ temos:

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x-1 \\ -(x^2-x) & x+2 \\ \hline 2x-2 & \\ -(2x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

i) $f(x=1) = 1$

ii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(x=1)$. logo $f(x)$ é descontínua para $x = 1$.

para $x \neq 1$ temos. $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\Delta y = \frac{(x_0+\Delta x)^2 + (x_0+\Delta x) - 2}{(x_0+\Delta x) - 1} - \frac{x_0^2 + x_0 - 2}{x_0 - 1} \quad \text{com } x_0 \neq 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x_0+\Delta x)^2 + (x_0+\Delta x) - 2}{(x_0+\Delta x) - 1} \right] - \frac{x_0^2+x_0-2}{x_0-1}$$

$= \frac{x_0^2 + x_0 - 2}{x_0 - 1} - \frac{x_0^2+x_0-2}{x_0-1} = 0$. logo $f(x)$ é contínua $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ com $x_0 \neq 1$.

Q4) $f(x) = \frac{e^{3x} \operatorname{sen}(x)}{x}$ $\qquad (e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3$

$$f'(x) = \frac{(e^{3x} \operatorname{sen}(x))' x - e^{3x} \operatorname{sen}(x) (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{(3e^{3x} \cdot \operatorname{sen}(x) + e^{3x} \cos(x)) x - e^{3x} \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}\left[3x\,sen(x) + x\cos(x) - sen(x)\right]$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}\left[sen(x)(3x-1) + x\cos(x)\right]$$

$$df = \frac{e^{3x}}{x^2}\left[(3x-1)\,sen(x) + x\cos(x)\right] dx$$

---

15) Extremos Relativos

C.N. $y' = 0$ ou $y' = \nexists$ como existe a derivada

temos $y' = (ch(x))' = sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = 0$

$$e^{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{x} = e^{-x} \text{ e } \ln e^{x} = \ln e^{-x}$$

$$\Rightarrow x \ln e = -x \ln e \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$$

ponto crítico

C.S. $y'' = \begin{cases} < 0 & \text{máximo} \\ > 0 & \text{mínimo} \end{cases}$

$$y'' = (y')' = (sh(x))' = ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$y''(x=0) = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = 1 \quad \text{mínimo relativo.}$$

Extremos absolutos

$$y(x=-1) = \frac{e^{-1} + e^{-(-1)}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} = \frac{e^{2}+1}{2e} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

$$y(x=1) = \frac{e^{1} + e^{-1}}{2} = y(x=-1) > 1 \quad \text{máximo absoluto}$$

$$y(x=0) = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = 1 \quad \text{mínimo absoluto}$$