UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________
Prova Escrita Nº 1 Turma V2 02/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas todas as questões acumulando no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,5) Determine, se possível, os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4^{(n+2)}-(8^n)^n}{8^{(n^2-1)}+6^n}\right]\left[\frac{3+n}{n+2}\right]^{(n+2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{3}{5}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{5}}\left[\frac{\ln(5x-2)}{x-\frac{3}{5}} + \frac{\left[\sqrt{x}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right]}\right].$$

Questão 2: (Valor 2,5) Analise a continuidade da seguinte função no ponto $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2 + |x-2|^3}{(x-2)^2} & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{(x-2) + sen(x-2)}{(x-2)} & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Questão 3: (Valor 2,5) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x) = \ln(x+2)^{(x^2+2x+3)} + (x^2+1)(x-3).$$

Questão 4: (Valor 2,5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = e^{sen(x)}$ no intervalo $x \in [0,\pi]$.

1) a) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\frac{4^{(n+2)} - (8^n)^n}{8^{(n^2-1)} + 6^n}\right]}_{A} \underbrace{\left[\frac{3+n}{n+2}\right]^{(n+2)}}_{B} = L$$

$$B = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3+n}{n+2}\right]^{(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2+1}{n+2}\right]^{(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2)} =$$

$m = n+2$, $m\to\infty$ quando $n\to\infty$

$$B = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4^{(n+2)} - (8^n)^n}{8^{(n^2-1)} + 6^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4^n\cdot 4^2 - 8^{n^2}}{\frac{8^{n^2}}{8} + 6^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n^2}\left[16\left(\frac{4}{8^n}\right)^n - 1\right]}{8^{n^2}\left[\frac{1}{8} + \left(\frac{6}{8^n}\right)^n\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[16\left(\frac{4}{8^n}\right)^n - 1\right]}{\left[\frac{1}{8} - \left(\frac{6}{8^n}\right)^n\right]} =$$

$$= \frac{0-1}{\frac{1}{8}-0} = -\frac{1}{\frac{1}{8}} = -8.$$ Logo, $L = A\cdot B = -8e$.

b) $$\lim_{x\to\frac{3}{5}}\left[\underbrace{\frac{\ln(5x-2)}{x-\frac{3}{5}}}_{A} + \underbrace{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{3}{5}}}}_{B}\right] = L$$

$$A = \lim_{x\to\frac{3}{5}}\left[\frac{\ln(5x-2)}{\frac{5x-3}{5}}\right] = \lim_{x\to\frac{3}{5}}\left[\frac{5\ln(5x-3+1)}{5x-3}\right] =$$

fazendo $y = 5x - 3 \Rightarrow y \to 0$ quando $x \to \frac{3}{5}$

$$A = \lim_{y \to 0} 5 \frac{\ln(1+y)}{y} = 5 \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 5 \cdot 1 = 5$$

$$B = \lim_{x \to \frac{3}{5}} \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{3}{5}}} \right]$$

fazendo $y^6 = x$ segue que $y \to \sqrt[6]{\frac{3}{5}}$ quando $x \to \frac{3}{5}$

$$= \lim_{y \to \sqrt[6]{\frac{3}{5}}} \frac{\left[y^3 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right]}{\left[y^2 - \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right]}$$

como $y = \sqrt[6]{\frac{3}{5}}$ é um zero de ambos polinômios vamos simplificar ambas.

$$\begin{array}{l|l}
y^3 - \sqrt{\frac{3}{5}} & y - \sqrt[6]{\frac{3}{5}} \\ \cline{2-2}
-\left(y^3 - \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y^2\right) & y^2 + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y + \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \\ \cline{1-1}
\sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y^2 - \sqrt{\frac{3}{5}} & \\
-\left(\sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}} y\right) & \\ \cline{1-1}
\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}} y - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} & \\
-\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}} y - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{6}}\right) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\boxed{y^3 - \sqrt{\frac{3}{5}} = \left(y - \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)\left(y^2 + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y + \sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)}$$

$$y^2 - \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = y^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}}$$

$$= \left(y - \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)\left(y + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)$$

Portanto.

$$\frac{\left[y^3 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right]}{\left[y^2 - \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right]} = \frac{\cancel{\left(y - \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)}\left(y^2 + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y + \sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)}{\cancel{\left(y - \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)}\left(y + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\right)}$$

$$B = \lim_{y \to \sqrt[6]{\frac{3}{5}}} \frac{\left[y^2 + \sqrt[6]{\frac{3}{5}}\, y + \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \right]}{\left(y + \sqrt[6]{\frac{3}{5}} \right)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{6}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt[6]{\frac{3}{5}} + \sqrt[6]{\frac{3}{5}} \right)} =$$

②

$$= \frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{6}}} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{3}{5}}.$$

Logo $L = A + B = 5 + \frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{3}{5}}$.

---

2) Continuidade da função em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2 + |x-2|^3}{(x-2)^2} & \text{se } x < 2 \\[2mm] 1 & \text{se } x = 2 \\[2mm] \dfrac{(x-2) + \operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

i) $f(x=2) = 1$ está definida

ii) $$L^- = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x-2)^2 + |x-2|^3}{(x-2)^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[1 + \frac{|x-2|^2\,|x-2|}{(x-2)^2}\right] = \lim_{x\to 2^-}\left[1 + |x-2|\right] = 1$$

$$L^+ = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{(x-2) + \operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left[1 + \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)}\right]$$ fazendo $y = x-2$ segue que $y \to 0^+$ quando $x \to 2^+$

$$= \lim_{y\to 0^+}\left[1 + \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right] = 1 + 1 = 2.$$ Logo

$L^- = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq L^+ = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, portanto o

$\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe e consequentemente a função não é contínua em $x=2$.

---

3) Diferencial de primeira ordem.

$$f(x) = \underbrace{\ln (x+2)^{(x^2+2x+3)}}_{f_1} + \underbrace{(x^2+1)(x-3)}_{f_2}$$

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx \qquad \frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}.$$

$$\frac{df_1}{dx} = ? \qquad f_1(x) = \ln (x+2)^{(x^2+2x+3)} = (x^2+2x+3) \ln(x+2)$$

$$\frac{df_1}{dx} = (x^2+2x+3)' \ln(x+2) + (x^2+2x+3) \left[\ln(x+2)\right]'$$

$$= (2x+2) \ln(x+2) + (x^2+2x+3) \frac{1}{(x+2)} \cdot 1$$

$$= 2(x+2) \ln(x+2) + \frac{(x^2+2x+3)}{(x+2)}$$

$$= \frac{2(x+2)^2 \ln(x+2) + (x^2+2x+3)}{(x+2)}$$

$$\frac{df_2}{dx} = \left[(x^2+1)(x-3)\right]' = (x^2+1)'(x-3) + (x^2+1)(x-3)'$$

$$= 2x(x-3) + (x^2+1) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$df = \left[\underbrace{\frac{2(x+2)^2 \ln(x+2) + (x^2+2x+3)}{(x+2)}}_{\frac{df_1}{dx}} + \underbrace{(3x^2-6x+1)}_{\frac{df_2}{dx}} \right] dx$$