Gabarito P1 TV4 02/2015

Q1) $y = \dfrac{\sqrt{e^x(3x+1)}}{e^x+1}$

$e^x+1 > 0$ e mais $e^x + 1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

no numerador $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, logo resta

$3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -\frac{1}{3}\}$.

Q2) a) $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{4-4\cos^2(x)}} \right] \quad \dfrac{0}{0} \cdot \dfrac{(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{[\sqrt{x^2+4}-2][\sqrt{x^2+4}+2]}{\sqrt{4[1-\cos^2(x)]}\,[\sqrt{x^2+4}+2]} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2+4-4}{\sqrt{4}\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}\,[\sqrt{x^2+4}+2]}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2|\operatorname{sen}(x)|} \dfrac{1}{[\sqrt{x^2+4}+2]}$ como $\operatorname{sen} x \sim x,\ x \to 0$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2|x|[\sqrt{x^2+4}+2]} = \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|^2}{2|x|[\sqrt{x^2+4}+2]}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{2[\sqrt{x^2+4}+2)} = \dfrac{|0|}{2[2+2]} = 0$.

b) $\lim_{n \to \infty} \left[\dfrac{\sqrt{4n^4-n^3+2n}}{2n^2+n} \right] \left[\dfrac{2n+2}{2n+1} \right]^{2n} = 1 \cdot e = e$

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{4n^4-n^3+2n}}{2n^2+n} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^4[4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}]}}{n^2[2+\frac{1}{n}]} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}}{\left[2+\frac{1}{n}\right]} = \frac{\sqrt{4-0+0}}{2+0} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2n+1}\right]^{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\cancel{\frac{1}{2n+1}}\right]^{2n+1}_{\,e} \cdot \left[1+\cancel{\frac{1}{2n+1}}\right]^{-1}_{\,1} = e\cdot 1 = e$$

Q3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

i) $f(x=2) = 1$

ii) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}$ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-6x^2+11x-6)'}{(x^2-5x+6)'} = \lim_{x\to 2} \frac{(3x^2-12x+11)}{2x-5}$$

$$= \frac{3\cdot 4 - 12\cdot 2 + 11}{2(2)-5} = \frac{-1}{-1} = 1$$

iii) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(x=2) = 1$, logo $f(x)$ é contínua em $x=2$.

Q4) $f(x) = \cos(2x)\, e^{(3x)}$ $df = \frac{df}{dx}\, dx$

$$\frac{df}{dx} = [\cos(2x)]'\, e^{(3x)} + \cos(2x)\left[e^{(3x)}\right]'$$

$$= -\operatorname{sen}(2x)\cdot 2\, e^{(3x)} + \cos(2x)\, e^{(3x)}\cdot 3$$

$$= e^{(3x)}\left[3\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x)\right].$$

$$df = e^{(3x)}\left[3\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x)\right] dx.$$

Q5) Extremos Relativos $y = e^{x}(x^2+3x+1)$ em $[-5, 1]$

C.N. $y' = 0$ ou $y' = \nexists$ (pontos críticos)

$$y' = e^{x}(x^2+3x+1) + e^{x}(2x+3) = e^{x}(x^2+5x+4) = 0$$

$x^2 + 5x + 4 = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$; $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{9}}{2} = -4$

pontos críticos no intervalo $[-5, 1]$ são dois x_1 e x_2.

C.S. $y'' = \begin{cases} > 0 & \text{mínimo relativo} \\ < 0 & \text{máximo relativo} \end{cases}$

$$y'' = (y')' = \left[e^{x}(x^2+5x+4)\right]' = e^{x}(x^2+5x+4) + e^{x}(2x+5)$$

$$y'' = e^{x}(x^2+7x+9)$$

$$y''(x_1 = -1) = e^{-1}\left[(-1)^2 + 7(-1) + 9\right] = e^{-1}\, 3 = \frac{3}{e} > 0$$

Logo em $x_1 = -1$ a função tem um mínimo relativo.

$$y''(x_2 = -4) = e^{-4}[(-4)^2 + 7(-4) + 9] = e^{-4}[25 - 28]$$

$$= -3e^{-4} = -\frac{3}{e^4} < 0$$

Logo em $x_2 = -4$ a função tem um máximo relativo.

<u>Extremos Absolutos</u>

$$y(x = -5) = e^{-5}[(-5)^2 + 3(-5) + 1] = e^{-5} \cdot 11 = \frac{11}{e^5}$$

$$y(x = -4) = e^{-4}[(-4)^2 + 3(-4) + 1] = e^{-4} \cdot 5 = \frac{5}{e^4} = \frac{5e}{e^5}$$

$$y(x = -1) = e^{-1}\{(-1)^2 + 3(-1) + 1\} = e^{-1}(-1) = -\frac{1}{e}$$

$$y(x = 1) = e^{1}[(1)^2 + 3(1) + 1] = e \cdot 5$$

A função alcança o:

- máximo absoluto em $x = 1$. com $y = 5e$
- mínimo absoluto em $x = -1$, que também é um mínimo relativo com $y = -\frac{1}{e}$.