UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________

Prova Escrita Nº 2 Turma V1 02/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,5) Encontre as primitivas da função $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2}$. Isto é, calcule $\displaystyle\int\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$.

Questão 2: (Valor 2,5) Determine $\displaystyle\int_1^e[1+\ln(x)]dx$.

Questão 3: (Valor 2,5) Calcule, através da integral definida, o comprimento da curva definida por $f(x)=1-|x|$ no intervalo $x\in[-1,1]$.

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=e^x-1$ no intervalo $x\in[0,\ln(2)]$ ao redor do eixo OX.

Fórmulas:

$$L=\int_a^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \qquad L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

~~[illegible]~~ No 2 V1 02/2007

1) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B_1}{(x+1)} + \dfrac{B_2}{(x+1)^2}$ frações simples.

$\to \dfrac{x}{\cancel{(x-1)(x+1)^2}} = \dfrac{A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1)}{\cancel{(x-1)(x+1)^2}}$

$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1)$

LD DESENVOLVE AQUI NORMAL DEPOIS COLOCA EM EVIDÊNCIA

$x = (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2)$

$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B_1 \\ 1 = 2A + B_2 \\ 0 = A - B_1 - B_2 \end{array}\right\}$ resolvendo o sistema temos: $A = \frac{1}{4}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$ e $B_2 = \frac{1}{2}$ logo.

AÍ VOLTA LÁ EM CIMA. FICA SÓ O $\underline{X}$. E AQUI EM BAIXO FICA X=X

$\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}$ e. portanto.

$\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int\left[\underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)}} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{x-1}\,dx}_{I_1} - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{x+1}\,dx}_{I_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx}_{I_3} =$

$\displaystyle \to \int \frac{1}{(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,d(x-1) = \ln|x-1| + C_1$

$\displaystyle I_1 = \int \frac{dx}{(x-1)} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} = \ln|x-1| + C_1$

$\displaystyle \to \int \frac{1}{(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)}\,d(x+1) = \ln|x+1| + C_2$

$\displaystyle I_2 = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)} = \ln|x+1| + C_2$

$\displaystyle I_3 = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x+1} + C_3$

$\displaystyle \to \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,d(x+1) = \int (x+1)^{-2}\,d(x+1) = \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = (x+1)^{-1} \cdot \frac{1}{-1} = \frac{1}{(x+1)^1} \cdot \frac{1}{-1} = -\frac{1}{x+1} + C_3$

Logo.

$\displaystyle \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

2) $\displaystyle\int_1^e [1+\ln x]\,dx = \underbrace{\int_1^e dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{\mathrm{II}}$

$$\mathrm{I} = \int_1^e dx = x\Big|_1^e = (e-1)$$

$$\mathrm{II} = \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{v}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{x}\,dx}_{du} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}}$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e$$

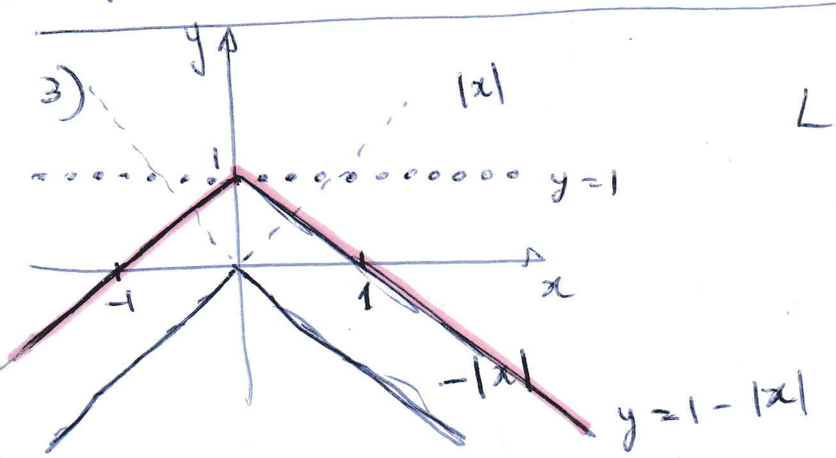
$$= (e\ln e - 1\cancel{\ln 1}^{0}) - (e-1)$$

$$= e - e + 1 = 1$$

$$\int_1^e (1+\ln x)\,dx = \mathrm{I} + \mathrm{II} = (e-1) + 1 = e.$$

---

3)



$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$y = \begin{cases} 1-x & \forall x\in[0,1] \\ 1+x & \forall x\in[-1,0] \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -1 & \forall x\in[0,1] \\ 1 & \forall x\in[-1,0] \end{cases}$$

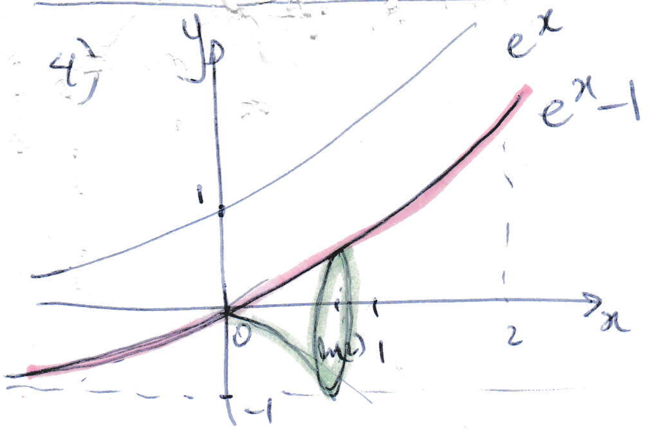
$$L = L_1 + L_2 = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+1^2}\,dx + \int_0^1\sqrt{1+(-1)^2}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\sqrt{2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,x\Big|_{-1}^{0} + \sqrt{2}\,x\Big|_0^{+1} = \sqrt{2}\left[(0-(-1)) + (1-0)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,[1+1] = 2\sqrt{2}.$$

№2 v1 02/2007

4)



$$V_x = \pi \int_0^{\ln(2)} (e^x - 1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln(2)} \left[(e^x)^2 - 2e^x + 1 \right] dx =$$

$$= \pi \left\{ \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x} \, dx}_{I1} - 2 \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x \, dx}_{I2} + \underbrace{\int_0^{\ln(2)} dx}_{I3} \right\} =$$

$$I1 = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} \, dx \qquad u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{2} \, d(2x) = \frac{1}{2} \, e^{2x} \Big|_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2} \left(e^{2\ln(2)} - e^{2 \cdot 0} \right) = \frac{1}{2}(4-1)$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$I2 = \int_0^{\ln(2)} e^x \, dx = e^x \Big|_0^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)} - e^0 \right) = 2 - 1 = 1.$$

$$I3 = \int_0^{\ln(2)} dx = x \Big|_0^{\ln(2)} = \ln(2) - 0 = \ln(2).$$ Logo

$$V_x = \pi \left\{ \frac{3}{2} - 2 \cdot 1 + \ln(2) \right\} = \pi \left[\frac{3 - 4 + 2\ln(2)}{2} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{\ln(4) - 1}{2} \right].$$