	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ____________** **Assinatura do Aluno: ____________** **Prova Escrita Nº 2 Turma V1 02/2010**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação faz parte da Avaliação;**
- **Faça a prova com caneta azul ou preta. Respostas à lápis não terão direito a recorreção;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = x^2 e^{2x}$. Isto é, calcule $\int x^2 e^{2x}\, dx$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine $\int_2^3 \frac{2x}{x^2 - 1} dx$.

Questão 3: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva trigonométrica $y = sen(2x)$ no intervalo $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ao redor do eixo OX.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule o comprimento da seguinte curva definida parametricamente: $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\,sen\,t \end{cases}$ no intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$; $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$; $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$;

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$; $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \neq 0$;

$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln|\sec(x) + tg(x)| + C, \quad a \neq 0$; $\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

Respostas: Gustavo Benitez Alvarez.

(1) $I = \int x^2 e^{2x}\,dx$ Integração por parte $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$, já que $dv = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\,dx = e^{2x}dx$

$I = \int x^2 e^{2x}dx = x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x e^{2x}dx$ fazendo integração por parte novamente temos $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{2x}dx$. Logo

$I = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right]$

$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x}\frac{2}{2}dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - x) + \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - x) + \frac{1}{4}e^{2x} + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\left[x^2 - x + \frac{1}{2}\right] + C$, onde C é constante arbitraria

(2) $\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx$ Método 1.: completar o diferencial.

$2x\,dx = d(x^2) = d(x^2-1)$ Logo.

$\int_2^3 \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int_2^3 \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \ln|x^2-1|\Big|_2^3$

$= \ln|3^2-1| - \ln|2^2-1| = \ln\left|\frac{9-1}{4-1}\right| = \ln\left|\frac{8}{3}\right| = \ln\frac{8}{3}$.

Método 2: Frações Simples $\quad x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1 \;; x_2=-1$

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+(A-B)}{x^2-1}$$

$$2x = x(A+B)+(A-B) \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = A+B \Rightarrow 2=2A \Rightarrow A=1 \text{ e } B=1 \\ 0 = A-B \Rightarrow A=B \end{array}$$

Logo

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)}$$ portanto.

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)}\right] dx = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)} + \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)}$$

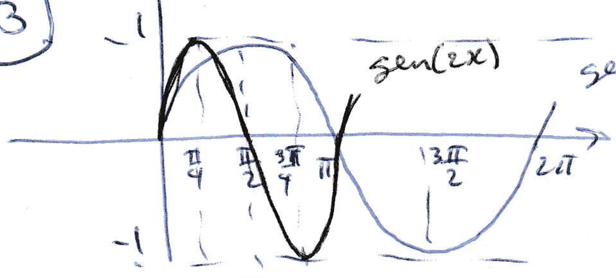
$$= \int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)} + \int_2^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)} = \ln|x-1|\Big|_2^3 + \ln|x+1|\Big|_2^3$$

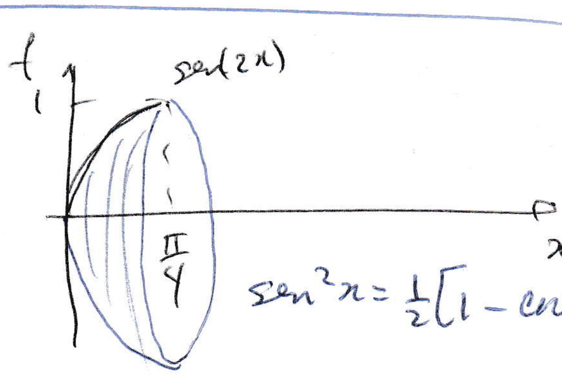
$$= \left[\ln|3-1| - \ln|2-1|\right] + \left[\ln|3+1| - \ln|2+1|\right]$$

$$= \ln 2 - \overset{0}{\cancel{\ln 1}} + \ln 4 - \ln 3 = \ln(2\cdot 4) - \ln 3$$

$$= \ln\left(\frac{8}{3}\right).$$

3





$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]$$

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(2x)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}[1-\cos(2\cdot 2x)]\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [1-\cos(4x)]\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x)\,dx \right\} = \frac{\pi}{2}\left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x)\,d(4x) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{ x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{ \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{4}\left[\overset{0}{\mathrm{sen}\left(\cancel{4}\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}}\right)} - \overset{0}{\mathrm{sen}(4\cdot 0)}\right] \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot 0 \right\} = \frac{\pi^2}{8}.$$

---

4) Questão 4 da Prova Escrita No 2 Turma V1/V3 02/2009

---

5) Questão 4 da Prova Escrita No 2 02/2006

Criterios de Correção

Q1 Cont. Arb. 0,5 + I. Partes 1 0,7 + IP2 0,7 + 0,1 Detalhes.

Q2 Primitiva 1,0 + 1,0 TFC

Q3 Primitiva 1,0 + 1,0 TFC

Q4 0,5 LI + 1,0 Primitiva + 0,5 TFC

Q5) Derivadas 0,5 + Primitiva 1,0 + TFC 0,5