TOTAL: 49 provas

	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** __________________ **Assinatura do Aluno:** __________________ **Prova Escrita Nº 2 Turma V2 01/2007**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**

Questão 1: (Valor 2,5) Encontre as primitivas da função $f(x) = e^x senx$. Isto é, calcule $\int e^x senx\, dx$.

Questão 2: (Valor 2,5) Determine $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Questão 3: (Valor 2,5) Calcule o comprimento da curva definida por $y = x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas:
$y_1 = senx$ e $y_2 = 4\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)$.

V2

1) Determine $I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

Fazendo integração por parte
$u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$
$du = e^x dx$ e $v = -\cos x$, logo

$$I = -e^x \cos x - \int -\cos x \, e^x dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

repetindo o procedimento
$u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$
$du = e^x dx$ e $v = \operatorname{sen} x$

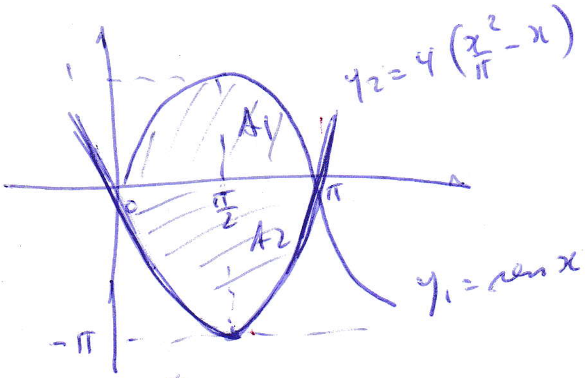
$$= -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, e^x dx \text{ , ou seja,}$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$ e explicitando a integral temos:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ ou

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

2) Área entre as curvas: $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = 4\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)$



$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^\pi |\operatorname{sen} x| dx = \int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi =$$

$$= -[\overset{-1}{\cos \pi} - \overset{1}{\cos 0}] = -(-2) = 2.$$

$$A_2 = \int_0^\pi \left|4\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)\right| dx = \int_0^\pi -4\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right) dx = -4\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{\pi} - x\right) dx =$$

$$= -4\left[\frac{x^3}{3\pi} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^\pi = -4\left[\frac{\pi^3}{3\pi} - \frac{\pi^2}{2}\right] = -4\left[\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right] = -4\pi^2\left(\frac{-1}{6}\right)$$

$$= 4\frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{3}. \text{ Logo } A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{2\pi^2}{3}$$

3) Determine $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ se $x = 2$ e $x = 1$
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} = \frac{A_1(x-2) + A_2(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x - (2A_1+A_2)}{(x-1)(x-2)}$$

Logo, $A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$

$-(2A_1 + A_2) = 1 \Rightarrow -2A_2 + A_2 = -1$

$-A_2 = -1$ ou $A_2 = 1$

$A_1 = -A_2 = -1$

$$= -\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)}$$

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int_3^4 -\frac{1}{(x-1)}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-2)}\,dx =$$

$$= -\underbrace{\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)}}_{I_1} + \underbrace{\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)}}_{I_2} = -I_1 + I_2$$

$I_1 = \int_3^4 \frac{dx}{(x-1)}$ $\quad z = x-1 \Rightarrow dz = dx$ e $I_1 = \int_2^3 \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_2^3$

$I_1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$I_2 = \int_3^4 \frac{dx}{(x-2)} \Rightarrow z = x-2 \rightarrow dz = dx$ e $I_2 = \int_1^2 \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_1^2 =$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. Logo

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = -I_1 + I_2 = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

---

4) Calcule o comprimento da $y = x^2$ em $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ $\quad y' = 2x$ logo $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+4x^2}$

$= \int_0^{1/2} \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx$ $\quad$ fazendo $x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} t)'\,dt$

$dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$ $\quad x \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

(2)

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1}{4}\left[1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\right]}\ \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}{\cos^3 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\operatorname{sen} t}_{u}\ \underbrace{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt}_{dv} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}$$

Integrando por parte na primeira integral.

$u = \operatorname{sen} t \Rightarrow du = \cos t\,dt$

$$dv = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt \Rightarrow v = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt = \int -\frac{d(\cos t)}{\cos^3 t} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t}.$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\frac{1}{2\cos^2 t}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\frac{1}{2\cos^2 t}\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos t}$$

Sabendo que
$$\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\pi/4}$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}\right|\Big|_0^{\pi/4}$$

Segue que

$$L = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{2\cos^2 t}\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \cancelto{0}{\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right).$$

$\approx 0,6156$