	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ____________________** **Assinatura do Aluno: ____________________** **Prova Escrita Nº 2 Turma V2 01/2008**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**

Questão 1: (Valor 2,5) Encontre as primitivas da função $f(x) = (x+2)^2 \ln(x+2)^2$. Isto é, calcule $\int (x+2)^2 \ln(x+2)^2 \, dx$.

Questão 2: (Valor 2,5) Determine $\int_3^4 \frac{2x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$.

Questão 3: (Valor 2,5) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva hiperbólica $y = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ no intervalo $x \in [\ln(1), \ln(2)]$ ao redor do eixo OX.

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas:
$y_1 = senx$ e $y_2 = 4\left(\frac{x^2}{\pi} - x\right)$.

$$\int (x+2)^2 \ln (x+2)^2 dx = \int 2\,(x+2)^2 \ln(x+2)\, dx \qquad \begin{array}{|l} z = x+2 \\ dz = dx \end{array}$$

$= 2 \int z^2 \ln z \, dz$ Integrando por parte $u = \ln z \Rightarrow du = \frac{1}{z} dz$

$dv = z^2 dz$

$v = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3}$

$$2\left[\frac{z^3}{3} \cdot \ln z - \int \frac{z^3}{3} \cdot \frac{1}{z} dz \right] =$$

$$\frac{2}{3}\left[z^3 \ln z - \int z^2 dz \right] = \frac{2}{3}\left[z^3 \ln z - \frac{z^3}{3} \right] + C =$$

$$\frac{2}{3}\left[(x+2)^3 \ln(x+2) - \frac{(x+2)^3}{3} \right] + C = \frac{2}{3}(x+2)^3 \left[\ln(x+2) - \frac{1}{3} \right] + C$$

$$\frac{2}{3}(x+2)^3 \left[\frac{3 \ln(x+2) - 1}{3} \right] + C = \frac{2}{9}(x+2)^3 \ln\left[\frac{(x+2)^3}{e} \right] + C$$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{2x+1}{x(x^2 - 3x + 2)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)}$, as raízes do polinômio $Q(x)$ são $x=0$, $x=1$ e $x=2$. Transformando em frações simples temos:

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$2x+1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2)x + Cx(x-1)$ ⊛ atribuindo valores para determinar os coeficientes A, B e C

se $x=0 \Rightarrow 1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

se $x=1 \Rightarrow 3 = B(-1) \cdot 1 \Rightarrow B = -3$

se $x=2 \Rightarrow 5 = C\, 2 \cdot (1) \Rightarrow C = \frac{5}{2}$

$$\frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{3}{(x-1)} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)}$$

$$\int_3^4 \frac{2x+1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \int_3^4 \left[\frac{1}{2x} - \frac{3}{(x-1)} + \frac{5}{2(x-2)} \right] dx = \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dx}{x} - 3\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)} + \frac{5}{2}\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)}$$

$$\frac{1}{2} \ln x \Big|_3^4 - 3 \ln(x-1) \Big|_3^4 + \frac{5}{2} \ln(x-2) \Big|_3^4 =$$

$$\tfrac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) - 3(\ln 3 - \ln 2) + \tfrac{5}{2}(\ln 2 - \cancel{\ln 1})$$

$$\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{4}{3}\right) - 3\ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{5}{2}\ln 2 = \ln\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \ln\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3} + \ln(2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\ln\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(2)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}\right] = \ln\left[\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{3}}{3^{\frac{1}{2}} 3^{3}}\right] = \ln\left(\frac{2^{5}}{3^{\frac{7}{6}}}\right)$$

$$V_x = \pi \int^{b} f^{2}(x)\, dx \qquad y = ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad x \in [\ln(1), \ln(2)]$$

$$= \pi \int_{\ln(1)}^{\ln(2)\ a} \left[\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right]^{2} dx = \frac{\pi}{4} \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \left[e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right] dx =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \tfrac{1}{2} e^{2x}\, d(2x) + 2\int_{\ln(1)}^{\ln(2)} dx + \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \tfrac{1}{-2} e^{-2x}\, d(-2x)\right] =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{2} e^{2x}\Big|_{\ln(1)}^{\ln(2)} + 2x\Big|_{\ln(1)}^{\ln(2)} - \tfrac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{\ln(1)}^{\ln(2)}\right] =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\left(\tfrac{1}{2} e^{2\ln(2)} - \tfrac{1}{2} e^{2\ln(1)}\right) + 2(\ln(2) - \ln(1)) - \tfrac{1}{2}\left(e^{-2\ln(2)} - e^{-2\ln(1)}\right)\right] =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{2}(2^{2} - 1) + \ln 2^{2} - \tfrac{1}{2}(2^{-2} - 1^{-2})\right] = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{3}{2} + \ln 4 - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{3}{4}\right)\right] =$$

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{15}{8} + \ln 4\right]$$

Prova P2 turma V2 1/2007 Q 4