

UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): _____
Assinatura do Aluno: _____
Prova Escrita N° 2 Turma V2 01/2013

Observações:

- Desligue os aparelhos celulares;
- Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;
- Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação faz parte da Avaliação;
- Faça a prova com caneta azul ou preta. Respostas à lápis não terão direito a correção;
- Não é permitido compartilhar materiais didáticos;
- É permitido o uso de calculadoras científicas;
- *Seja o mais explícito possível para responder as questões;*

Questão 1: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = x \ln(x)$. Isto é, calcule $\int x \ln(x) dx$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$.

Questão 3: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva hiperbólica $y = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ no intervalo $x \in [\ln(1), \ln(2)]$ ao redor do eixo OX.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas: $y_1 = x^2 - 2x + 1$ e $y_2 = -x^2 + 2x + 1$.

Questão 5: (Valor 2,0) Determine o comprimento da curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, onde $a > 0$.

Fórmulas: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$; $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$; $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$;

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln |\sec(x) + \tg(x)| + C, \quad a \neq 0; \quad \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$$

Q1) $\int x \ln x \, dx$ Integração por partes

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x \, dx \Rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + C$$

Q2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) \, dx \Rightarrow$ Integração por partes

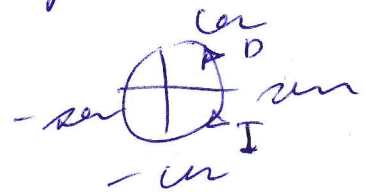
$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(x) \, dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 \right] - (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + [\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0] = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$$



Q3) Questão 3 da NR V1 1/2008

Q4) Questão 5 da VR 01/2007

Q5) $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$

$$= 4L_1$$

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{d}{dx} \left(a^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$L_1 = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \left. \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right|_0^a = a^{\frac{1}{3}} \left. \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_0^a$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \left[\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{0^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right] = a^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a$$

$$L = 4L_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a$$

