	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ____________________ **Assinatura do Aluno:** ____________________ **Prova Escrita Nº 2 Turma V2 02/2007**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,5) Encontre as primitivas da função $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3(x)}$. Isto é, calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3(x)}\,dx$.

Questão 2: (Valor 2,5) Determine $\displaystyle\int_0^1 \left[1+\frac{2x+(e-2)}{x^2+(e-2)x+1}\right]dx$.

Questão 3: (Valor 2,5) Calcule o comprimento da curva definida por $y=\dfrac{x^2}{2}$ no intervalo $0\le x\le 1$.

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule, através da integral definida, o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=1-|x|$ no intervalo $x\in[-1,1]$ ao redor do eixo OX.

Fórmulas: $L=\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ $\quad L=\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dt$ $\quad V_x=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\quad a\neq 0$$

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \underbrace{\int \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{dx}{\cos x}}_{II}$

$$I = \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx}_{dv} = \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u}\, \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x}}_{v} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\,dx \\ dv = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$II = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dz}{1-z^2},$$

onde $z = \operatorname{sen} x$ procurando na tabela temos:

$$\int \frac{dz}{a^2 - z^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+z}{a-z}\right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$II = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C$$

$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$. Logo

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = I + II = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C.$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \left[1 + \frac{2x + (e-2)}{x^2 + (e-2)x + 1}\right]dx = \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{2x + (e-2)}{x^2 + (e-2)x + 1}\,dx =$

$\displaystyle = x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{d(x^2 + (e-2)x + 1)}{x^2 + (e-2)x + 1}$ já que $d[x^2 + (e-2)x + 1] = [2x + (e-2)]\,dx$

$$= (1-0) + \ln|x^2 + (e-2)x + 1| \Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \left[\ln|1^2 + (e-2) + 1| - \ln|0 + (e-2)0 + 1| \right] =$$

$$= 1 + \underbrace{\ln|e|}_{1} - \underbrace{\ln|1|}_{0} = 1 + 1 = 2.$$

---

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{2} = x$, $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ fazendo

$x = \operatorname{tg} t$, $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt$, logo temos $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}\ \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}\, dt$$

como já foi encontrada a primitiva na questão 1 segue que:

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} + \frac{1}{4} \ln\left| \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} \right| \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

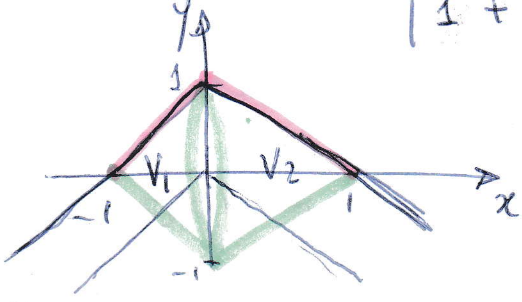
$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{4} \ln\left| \frac{1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \right| \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos^2 0} + \frac{1}{4} \ln\left| \frac{1 + \operatorname{sen} 0}{1 - \operatorname{sen} 0} \right| \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} \ln\left| \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \right] - \left[0 + \frac{1}{4} \underbrace{\ln|1|}_{0} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln\left| \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right|$$

---

4) $f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\qquad V_x = V_1 + V_2 = 2V_2$



$$V_2 = \pi \int_0^1 (1-x)^2\, dx = \pi \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\, dx =$$

$$V_2 = \pi\left\{\int_0^1 1\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx\right\} = \pi\left\{x\Big|_0^1 - 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right\}$$

$$= \pi\left\{(1-0) - (1^2 - 0^2) + \frac{1}{3}(1^3 - 0^3)\right\} = \pi\left\{1 - 1 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{\pi}{3}.$$

Logo $V_x = 2V_2 = \frac{2\pi}{3}$.