	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ____________________** **Assinatura do Aluno: ____________________** **Prova Escrita Nº 2 Turma V3 02/2011**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação faz parte da Avaliação;**
- **Faça a prova com caneta azul ou preta. Respostas à lápis não terão direito a recorreção;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x)=(x^2+3)sen(x)$. Isto é, calcule $\int (x^2+3)sen(x)dx$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine $\int_1^2 \frac{1}{x^3-x}dx$.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^3-x}$$

Questão 3: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=1+\cos(x)$ no intervalo $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ao redor do eixo OX.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas $f(x)=1-|x-1|$ e $g(x)=x^2-2x$.

Questão 5: (Valor 2,0) Determine o comprimento da curva Hipocicloide dada em forma paramétrica por $x(t)=a\cos^3(t)$, $y(t)=asen^3(t)$, onde $a>0$.

Fórmulas: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$; $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$; $V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$;

$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0$; $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\quad a\neq 0$;

$\int \frac{dx}{\cos(x)}=\ln|\sec(x)+tg(x)|+C,\quad a\neq 0$; $\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$

Prova No 2 Turma V3 2/2011 ①

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

1) $I = \int (x^2+3)\,\text{sen}\,x\,dx$

$u = x^2+3 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = \text{sen}\,x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

$I = -(x^2+3)\cos x - \int -\cos x\,(2x)\,dx$

$= -(x^2+3)\cos x + \int 2x\cos x\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \text{sen}\,x.$

$I = -(x^2+3)\cos x + 2\left[x\,\text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x\,dx\right]$

$= -(x^2+3)\cos x + 2x\,\text{sen}\,x + 2\cos x + C$

$= \cos x\left[2-(x^2+3)\right] + 2x\,\text{sen}\,x + C$

$= \cos x\left[-(x^2+1)\right] + 2x\,\text{sen}\,x + C.$

---

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3-x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2-1)}$

$\boxed{\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)} \quad \text{Reformulada}}$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

para $x=0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1$

para $x=-1 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

para $x = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3-x} = \int_1^2 -\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln|x|\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln|(x-1)|\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln|(x+1)|\Big|_1^2$$

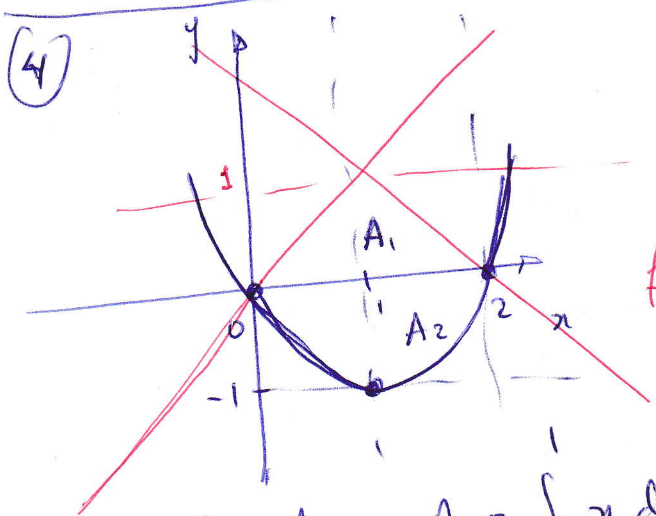
$$= -(\ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0}) + \frac{1}{2}\Big[\big(\ln(\cancel{2-1})^{\,0} - \underbrace{\ln(1-1)}_{-\infty}\big) + \ln(2+1) - \ln(1+1)$$

$$= -\ln 2 + \frac{1}{2}\left[\ln 3 - \ln 2 - \cancel{\ln 0}\right] \quad \boxed{\text{Reformulada}}$$

$$= -\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \infty = \infty \quad \boxed{\text{integral impropria.}}$$

---

(4)



$g(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$$f(x) = 1 - |x-1| = \begin{cases} 1-(x-1) & \text{se } (x-1) \geq 0 \\ 1 - -(x-1) & \text{se } (x-1) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$

$A_1 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(2\cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$

$A_2 = \int_0^2 |x^2 - 2x|\,dx = \int_0^2 -(x^2-2x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2$

$A_2 = -\left[\left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot\frac{0^2}{2}\right)\right] = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{12-8}{3}$

$A_2 = \frac{4}{3}$. Logo $A = 1 + \frac{4}{3} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$