



UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): _____
Assinatura do Aluno: _____
Prova Escrita N° 2 Turma V4 01/2007

Observações:

- Desligue os aparelhos celulares;
- Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;
- Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;
- Provas respondidas à lápis não terão direito a correção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;
- Não é permitido compartilhar materiais didáticos;
- É permitido o uso de calculadoras científicas;

Questão 1: (Valor 2,5) Encontre as primitivas da função $f(x) = x^2 \cos x$. Isto é, calcule $\int x^2 \cos x \, dx$.

Questão 2: (Valor 2,5) Determine $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1} \, dx$.

Questão 3: (Valor 2,5) Calcule o comprimento da curva definida por $y = \ln x$ no intervalo $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas:

~~$y_1 = |x-1|$~~ e $y_2 = -x^2 + 2x$.

$y_1 = |x-1| - 1$

01/2007

estime o I = \int x^2 \cos x dx

integração por partes (v4)

u = x^2 e dv = cos x dx
du = 2x dx e v = sen x

I = x^2 sen x - \int 2x sen x dx

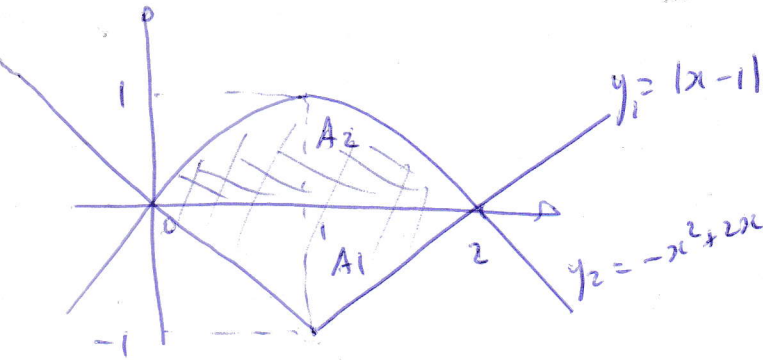
= x^2 sen x - 2 \int x sen x dx

= x^2 sen x - 2 \int -x cos x - \int -cos x dx

= x^2 sen x + 2x cos x - 2 \int cos x dx = x^2 sen x + 2x cos x - 2 sen x + C.

repetindo o procedimento com u = x e dv = sen x dx
du = dx e v = -cos x

2) área entre as curvas y1 = |x-1|-1 e y2 = -x^2+2x



A1 = \int_0^2 |y1| dx

A = A1 + A2

A2 = \int_0^2 |y2| dx

A1 = \int_0^2 ||x-1|-1| dx

y1 = { (x-1)-1 = x-2 se x > 1; -(x-1)-1 = -x se x < 1

A1 = \int_0^1 |-x| dx + \int_1^2 |x-2| dx = \int_0^1 -x dx + \int_1^2 -(x-2) dx = ...

1/2 - (-1/2) = 2/2 = 1

Esta está correta.

A2 = \int_0^2 |-x^2+2x| dx = \int_0^2 (-x^2+2x) dx = (-x^3/3 + 2x^2/2) |_0^2 = (-8/3 + 4) - 0 = -8/3 + 4 = -8/3 + 12/3 = 4/3

Logo A = A1 + A2 = 1 + 4/3 = 3/3 + 4/3 = 7/3

3) \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)}{(x+1)^2} dx fazendo z = x+1 tem dz = dx = \int_1^2 \frac{z}{z^2} dz = \int_1^2 \frac{dz}{z} = \ln z |_1^2 = \ln 2

012007

$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

4) Calcule o comprimento do $y = \ln x$ em $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+(y')^2} dx \quad y' = \frac{1}{x} \text{ e } \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \quad \text{fazendo } x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$t_0 = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) \approx 0,464$ $x \in [\frac{1}{2}, 1]$
 $t \in [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}]$

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\operatorname{csc} t}{\operatorname{csc} t} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{csc}^2 t}} \frac{1}{\operatorname{csc}^2 t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{csc} t \operatorname{sen} t \operatorname{csc} t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{csc}^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{csc} t \operatorname{sen} t} dt$$

$$= \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{csc}^2 t} dt}_{I_2}$$

Da tabela temos: $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \operatorname{csc} t - \operatorname{ctg} t \right| + C$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{d(\operatorname{csc} t)}{\operatorname{csc}^2 t} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} - \operatorname{csc}^{-2} t d(\operatorname{csc} t) = + \frac{1}{\operatorname{csc} t} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\operatorname{csc} \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\operatorname{csc} \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\operatorname{csc} \frac{1}{2}}$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} \right) \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \right) \right|$$

$$\approx 0,562 = -0,881 - (-1,443)$$