UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________
Assinatura do Aluno: ______________________
Prova Escrita Nº 2 Turma V4 02/2014

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine $\int e^{x}\cos(x)\,dx$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Determine a área da figura plana limitada pelas curvas $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=sen(x)\cos(x)$ no intervalo $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ao redor do eixo OX.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da superfície gerada pela rotação entorno do eixo OX da curva $9y^2=x(3-x)^2$.

Fórmulas: $L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$; $L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; $V_x=\pi\int_{a}^{b}[f(x)]^2\,dx$;

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0$; $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\quad a\neq 0$;

$\int\frac{dx}{\cos(x)}=\ln|\sec(x)+tg(x)|+C$; $\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$; $A_x=2\pi\int_{a}^{b}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

Calculo I V4 N2 2/2014

1) $\int e^x \cos(x)\,dx$

$\boxed{\text{Integração por partes duas vezes. } \int u\,dv = uv - \int v\,du}$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$dv = \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \int dv = \operatorname{sen}(x).$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = \int dv = -\cos(x).$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \left[-e^x \cos(x) - \int e^x(-\cos(x))\,dx\right]$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right] + C.$$

---

2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$ $\qquad x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$1 = A(x+2) + B(x-1)$

para $x = 1 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

para $x = -2 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x+2)}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) \Big|_2^3$$

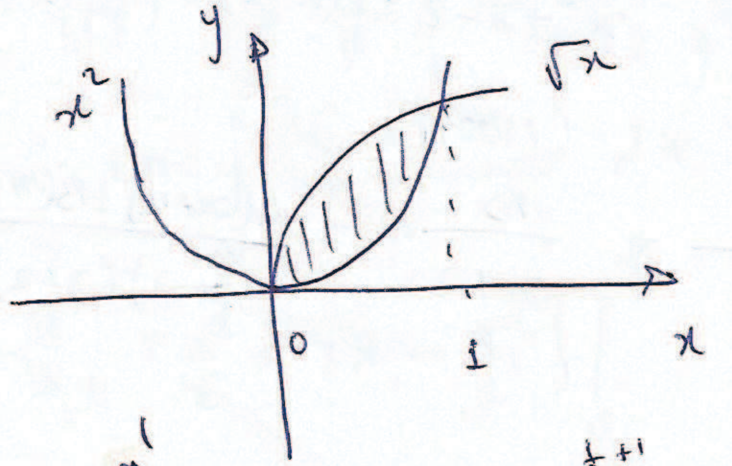
$$= \frac{1}{3}\left[\left(\ln(3-1) - \ln(3+2)\right) - \left(\ln(2-1) - \ln(2+2)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln 2 - \ln 5 - \cancel{\ln 1}^{\,0} + \ln 4 \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln 2 + \ln 4 - \ln 5 \right].$$

---

3) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$



$x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

$x(x^3-1) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1$

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

---

4) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(2x)\, dx \qquad \boxed{\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]}$$

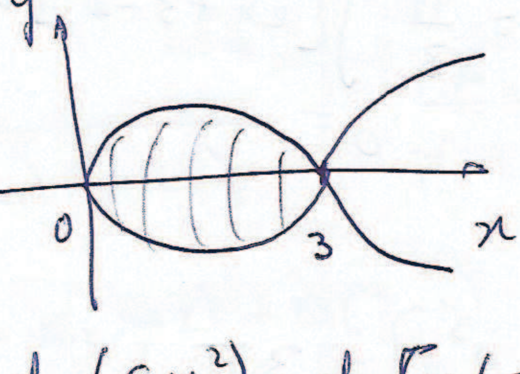
$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2 \cdot 2x)\right] dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos(4x)\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(4 \cdot \frac{\pi}{2})}{4}\right) - \left(0 - \frac{\operatorname{sen} 0}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{16}$$

---

5) $9y^2 = x(3-x)^2 \qquad A_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$



Derivando a equação da curva com respeito a x e considerando y função de x (implícita)

$$\frac{d}{dx}(9y^2) = \frac{d}{dx}\left[x(3-x)^2\right]$$

$$2\cdot 9y\frac{dy}{dx} = (x)'(3-x)^2 + x\left[(3-x)^2\right]'$$

$$18y\frac{dy}{dx} = (3-x)^2 + x\,2(3-x)(-1).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x)\left[(3-x)-2x\right]}{18y} = \frac{3(3-x)(1-x)}{18y}.$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{[18y]^2 + [3(3-x)(1-x)]^2}{[18y]^2}$$

$$= \frac{18\cdot 2\cdot 9y^2 + 9(3-x)^2(1-x)^2}{18\cdot 18y^2}$$

$$= \frac{18\cdot 2\,x(3-x)^2 + 9(3-x)^2(1-x)^2}{18\cdot 18\,y^2}$$

$$= \frac{9(3-x)^2\left[4x+(1-x)^2\right]}{18\cdot 18y^2} = \frac{(3-x)^2(x+1)^2}{18\cdot 2y^2}$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\cdot\sqrt{\frac{(3-x)^2(x+1)^2}{18\cdot 2y^2}} = y\frac{|3-x||x+1|}{3\cdot 2y}.$$

$$A_x = 2\pi\int_0^3 \frac{(3-x)(x+1)}{6}\,dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3 [2x+3-x^2]\,dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[2\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\left(3^2+3\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(0^2+3\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right)\right] = 3\pi.$$