UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ____________________
Assinatura do Aluno: ____________________
Prova Escrita Nº 2 Turma V4 02/2015

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = x\sqrt{x-1}$. Isto é, calcule $\int x\sqrt{x-1}dx$?

Questão 2: (Valor 2,0) Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, sen(x) \, dx$.

Questão 3: (Valor 2,0) Determine a área da figura plana limitada pelas curvas $y = 2x - x^2$ e $y = x^2 - 6x + 6$.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule a área da superfície gerada pela rotação entorno do eixo OX da figura plana limitada pelo laço da curva $9y^2 = x(3-x)^2$.

Questão 5: (Valor 2,0) Determine o comprimento da curva $f(x) = e^x$ no intervalo $x \in [0,1]$.

Fórmulas: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$; $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$; $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$;

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$; $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \neq 0$;

$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln|\sec(x) + tg(x)| + C$; $\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$; $A_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

Q1) $\int x\sqrt{x-1}\,dx \qquad t=\sqrt{x-1} \Rightarrow t^2+1=x$

$dx = \frac{dx}{dt}\cdot dt = 2t\cdot dt$, logo

$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int [t^2+1]\,t\cdot 2t\cdot dt$

$= 2\int [t^4+t^2]\,dt = 2\left[\frac{t^{4+1}}{4+1} + \frac{t^{2+1}}{2+1}\right] + C.$

$= 2\left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right] + C$

$= 2\left[\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + C.$

Q2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen}(x)\,dx$ Integração por partes duas vezes.

$u=x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x).$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{sen}(x)\,dx = -x^2\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot(-\cos(x))\,dx$

$I = -\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 0^2\cos(0)\right] + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$.

$$I = 2\left\{ x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx \right\}$$

$$= 2\left\{ \left[\frac{\pi}{2}\overset{1}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}} - 0\cdot\operatorname{sen}(0)\right] - (-\cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right\}$$

$$= 2\left\{ \frac{\pi}{2} + \left[\overset{0}{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}} - \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\right] \right\} = \pi - 2$$

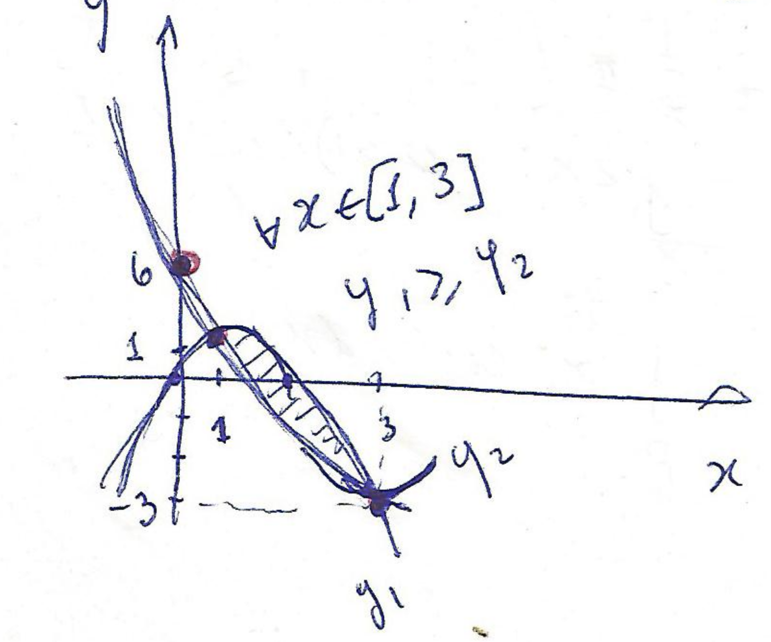
(Q3) $y_1 = 2x - x^2$ e $y_2 = x^2 - 6x + 6$

$y_1 = y_2 \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 - 6x + 6$

$2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}$



$[y_2]' = 2x - 6 = 2(x-3)$

$[y_1]' = 2 - 2x = 2(1-x)$

$$A = \int_1^3 \left| y_1 - y_2 \right| dx = \int_1^3 \left[(2x - x^2) - (x^2 - 6x + 6)\right] dx$$

$$= \int_1^3 \left[-2x^2 + 8x - 6\right] dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} - 6x\right]_1^3$$

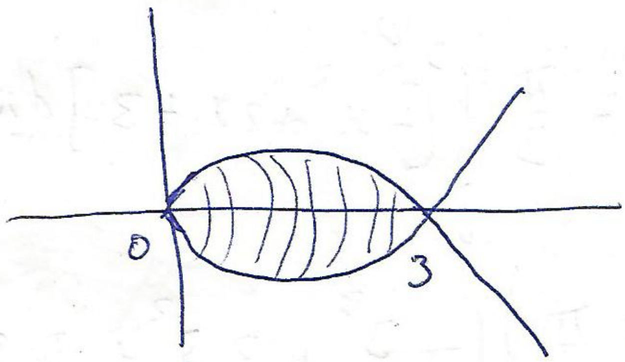
$$= \left[-2 \cdot \frac{3^3}{3} + 4\,3^2 - 6 \cdot 3\right] - \left[-2\,\frac{1^3}{3} + 4\,1^2 - 6 \cdot 1\right]$$

$$= \left[-2\,3^2 + 4\,3^2 - 2 \cdot 3^2\right] - \left[-\frac{2}{3} - 2\right]$$

$$= 0 \cdot 3^2 - \left[-\frac{2}{3} - 2\right] = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

Q4) $9y^2 = x(3-x)^2$

$$A_x = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



$$\frac{d}{dx}(9y^2) = \frac{d}{dx}\left[x(3-x)^2\right]$$

$$18y\,\frac{dy}{dx} = (3-x)^2 + x\,2(3-x)(-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x)\left[(3-x) - 2x\right]}{18y} = \frac{3(3-x)(1-x)}{18y}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(3-x)^2(1-x)^2}{6^2 y^2} = \frac{4 \cdot 9y^2 + (3-x)^2(1-x)^2}{4 \cdot 9y^2}$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{\frac{4x(3-x)^2+(3-x)^2(1-x)^2}{4\cdot 9y^2}}$$

$$= \frac{y}{2\cdot 3y}\sqrt{(3-x)^2\left[4x+(1-x)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{6}|3-x|\sqrt{4x+1-2x+x^2} = \frac{1}{6}|3-x|\sqrt{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{1}{6}|3-x|\sqrt{(x+1)^2} = \frac{1}{6}|3-x||x+1| = \frac{1}{6}(3-x)(x+1)$$

$$A_x = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{6}(3-x)(x+1)\,dx = \frac{\pi}{3}\int_0^3\left[3x+3-x^2-x\right]dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^3\left[-x^2+2x+3\right]dx = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+3x\right]\Bigg)_0^3$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{\left(-\frac{3^3}{3}+2\frac{3^2}{2}+3\cdot 3\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+0^2+3\cdot 0\right]\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(-3^2+3^2+3^2\right] = \frac{\pi}{3}3^2 = 3\pi.$$

Q5)

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad y = e^x$$

$y' = e^x$, logo

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx \qquad z = \sqrt{1+e^{2x}}$$

$$z^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = z^2-1 \Rightarrow x = \frac{\ln(z^2-1)}{2}$$

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2-1}\cdot 2z\, dz \qquad \text{e} \qquad x \in [0,1]$$
$$z \in [\sqrt{2}, \sqrt{1+e^2}]$$

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} z\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2-1}\, 2z\, dz$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{z^2}{z^2-1}\, dz = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{z^2-1+1}{z^2-1}\, dz$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left[1 + \frac{1}{z^2-1}\right] dz = z\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \left[\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$