02/2006

	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ______________________ **Assinatura do Aluno:** ______________________ **Prova Escrita Nº 2**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**

Questão 1: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x^2+4x+3}$. Isto é, calcule $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x^2+4x+3}dx$.

Questão 2: (Valor 2,0) Calcule $\int sh(x+1)ch(x-1)dx$ sabendo que $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Determine $\int cos(x + \frac{\pi}{2})\, sen^2(x - \frac{\pi}{2})dx$.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule o comprimento da seguinte curva definida parametricamente: $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\,sen\,t \end{cases}$ no intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

Fórmulas: $$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt$$

Respostas: Gustavo Benitez Alvarez.

1 Encontre as primitivas da função $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x^2+4x+3}$.

Isto é $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x+3}{2x^2+4x+3}\,dx$?

$$K = \frac{b}{2a} \Rightarrow b = \frac{4}{2\cdot 2} = 1$$

$$2x^2+4x+3 = a(x+K)^2 + l \Rightarrow$$

$a=2$, $b=4$ e $c=3$

$$l = c - \frac{b^2}{4a} \Rightarrow l = 3 - \frac{4\cdot 4}{4\cdot 2} = 1$$

$$2x^2+4x+3 = 2(x+1)^2+1$$

$$2x+3 = 2(x+1-1)+3 = 2(x+1)+1$$

$$\int \frac{2x+3}{2x^2+4x+3}\,dx = \int \frac{2(x+1)+1}{2(x+1)^2+1}\,dx = \underbrace{\int \frac{2(x+1)}{2(x+1)^2+1}\,dx}_{I1} + \underbrace{\int \frac{1}{2(x+1)^2+1}\,dx}_{I2}.$$

$$I2 = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$ procurando em tabela:

$\boxed{\begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array}}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)\right] + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}(x+1)) + C.$$

$$I1 = \int \frac{2t}{2t^2+1}\,dt = \int \frac{d(t^2)}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2t^2+1)}{2t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2t^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln|2(x+1)^2+1| + C.$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2(x+1)^2+1) + C.$$

022006

Logo a primitiva é:

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(2(x+1)^2+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}(x+1)\right) + C.$$

---

(2) Calcule $\int sh(x+1)\, ch(x-1)\, dx$ sabendo que

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$[sh(x+1)]' = ch(x+1) \quad e \quad [ch(x-1)]' = sh(x-1)$$

$$sh(x+1) = \frac{e^{(x+1)} - e^{-(x+1)}}{2} \quad e \quad ch(x-1) = \frac{e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}}{2}$$

$$sh(x+1)\, ch(x-1) = \frac{1}{4}\left[e^{(x+1)} e^{(x-1)} + e^{(x+1)} e^{-(x-1)} - e^{-(x+1)} e^{(x-1)} - e^{-(x+1)} e^{-(x-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{(x+1+x-1)} + e^{(x+1-x+1)} - e^{(x-1-x-1)} - e^{(-x-1-x+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{2} - e^{-2} - e^{-2x}\right] = \frac{1}{4}\left[e^{2x} - e^{-2x}\right] + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})$$

$$= \frac{1}{2}\, sh(2x) + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})$$

$$\int sh(x+1)\, ch(x-1)\, dx = \frac{1}{2}\int sh(2x)\, dx + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})\int dx =$$

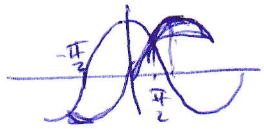
$$= \frac{1}{4}\int sh(2x)\, d(2x) + \frac{1}{4}(e^{2}-e^{-2})\,x + C_2$$

$$= \frac{1}{4}\, ch(2x) + C_1 + \frac{1}{4}(e^{2}-e^{-2})\,x + C_2$$

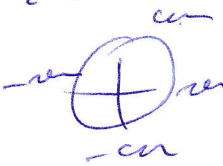
$$= \frac{1}{4}\, ch(2x) + \frac{1}{4}(e^{2}-e^{-2})\,x + C.$$

---

(3) $\int \cos(x+\frac{\pi}{2})\, sen^2(x-\frac{\pi}{2})\, dx$. Determine a primitiva.



$$\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos x \cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0} - sen\, x\, sen\,\tfrac{\pi}{2} = -\,sen\, x$$



$$sen(x-\tfrac{\pi}{2}) = sen\, x \cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}^{\,0} - \cos x\, sen\,\tfrac{\pi}{2} = -\cos x.$$

$$\int \cos(x+\tfrac{\pi}{2})\, sen^2(x-\tfrac{\pi}{2})\, dx = \int (-\,sen\, x)(-\cos x)^2\, dx =$$

$$= -\int sen\, x \cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

---

(4) Calcule o comprimento da seguinte curva definida parametricamente como:

$x(t) = a\cos t$
$y(t) = a\, sen\, t$ $\quad t\in[0, 2\pi]$

$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow L = 2\pi a$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = -a\, sen\, t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 sen^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = a\, t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a.$$

é o comprimento da circunferência de raio "a".

022006

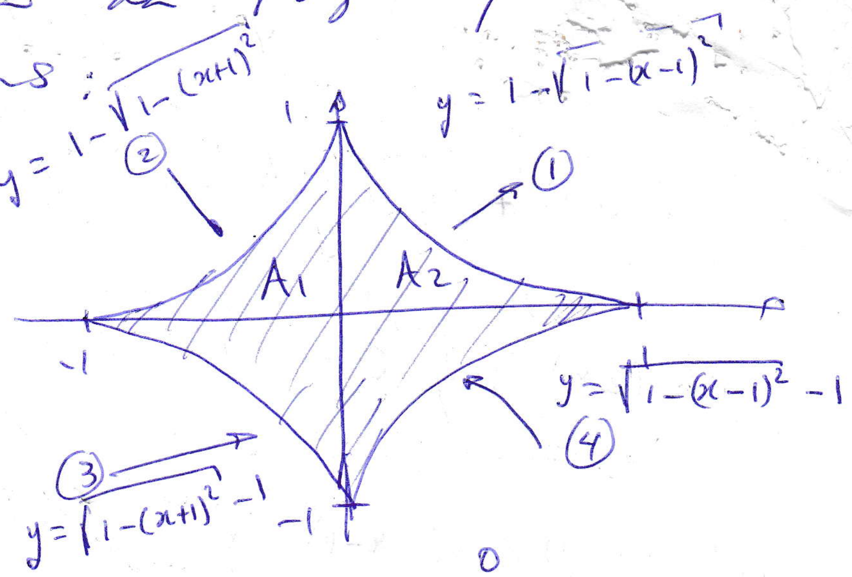
5 Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas:

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ①

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ ②

$(x+1)^2+(y+1)^2=1$ ③

$(x-1)^2+(y+1)^2=1$ ④



$$A1=\int_{-1}^{0}\left[1-\sqrt{1-(x+1)^2}-\left(\sqrt{1-(x+1)^2}-1\right)\right]dx=\int_{-1}^{0}\left[2-2\sqrt{1-(x+1)^2}\right]dx$$

$$=2x\Big|_{-1}^{0}-\underbrace{\int_{-1}^{0}2\sqrt{1-(x+1)^2}\,dx}_{I1}=+2-I1$$

fazendo $u=x+1 \Rightarrow du=dx$ e.

$$I1=\int_{0}^{1}2\sqrt{1-u^2}\,du=$$ fazendo $u=\operatorname{sen}t \Rightarrow du=\cos t\,dt$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(2t)+1\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\,d(2t)+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Logo $A1=2-I1=2-\frac{\pi}{2}$. Como $A_2=A_1$ por simetria temos que:

$$A=A_1+A_2=2A_1=2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=4-\pi.$$