UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________
Assinatura do Aluno: ______________________
Prova Escrita VR Turma V1 01/2008

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Sabendo que $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ determine o domínio de definição e a imagem da função $y=cth(x)=\dfrac{ch(x)}{sh(x)}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Determine, se possível, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|^3-2(x-1)^2}{(x-1)^2}$, b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3(x-1)+\ln(x)}{(x-1)}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x)=e^{2x}sen^2(x)$ no intervalo $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ sabendo que neste intervalo ela possui apenas um extremo relativo.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule o comprimento da ciclóide dada por $\begin{cases} x(t)=a(t-sent) \\ y(t)=a(1-\cos t) \end{cases}$ no intervalo $0\le t\le 2\pi$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas definidas como segue:
- Curva 1 corresponde a uma linha reta que passa pelos pontos (1,1) e (4,4),
- Curva 2 corresponde a uma parábola quadrática que passa pelos pontos (0,4), (2,0) e (4,4).

Q1) P1 Turma V2 1/2007

Q2) a) $\lim_{x\to 1^-} \frac{[-(x-1)]^3 - 2[(x-1)]^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)^3 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2}$

$= \lim_{x\to 1^-} [-(x-1)-2] = \lim_{x\to 1^-} (-x-1) = -2$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^3 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} [(x-1)-2] = -2$, Logo

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|^3 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = -2.$

$y = x-1 \Rightarrow x = 1+y$

b) $\lim_{x\to 1} \left[-3 + \frac{\ln(x)}{(x-1)}\right] = -3 + \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = -2$

como $\ln(1+y) \sim y$ quando $y \to 0$ segue $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

a) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|^3 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2|x-1| - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} =$

$= \lim_{x\to 1} [|x-1| - 2] = -2.$ também pode ser feito assim.

Q3) $f(x) = e^{2x} \operatorname{sen}^2(x)$

- Extremos relativos

∘ condição necessária $y' = 0$.

$y' = [e^{2x} \operatorname{sen}^2(x)]' = (e^{2x})' \operatorname{sen}^2 x + e^{2x} (\operatorname{sen}^2 x)' =$

$$y' = 2e^{2x}\,\text{sen}^2 x + e^{2x}\, 2\,\text{sen}\,x\,\cos x.$$

$$= e^{2x}\left[2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}(2x)\right]$$

$$= e^{2x}\left[2\,\tfrac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right] + \text{sen}(2x)\right]$$

$$= e^{2x}\left[1-\cos(2x) + \text{sen}(2x)\right] = 0$$

$1-\cos(2x)+\text{sen}(2x) = 0$ se $2x=0 \Rightarrow x=0$ segue

$1-\cos(0)+\text{sen}(0) = 0$

$1 - 1 + 0 = 0$, ou seja, $x=0$ é o ponto crítico.

∘ condisão suficiente $y'' = \begin{cases} >0 & \text{mínimo relativo} \\ <0 & \text{máximo relativo.} \end{cases}$

$$y'' = (y')' = \left[e^{2x}\left[1-\cos(2x)+\text{sen}(2x)\right]\right]' =$$

$$= (e^{2x})'\left[1-\cos(2x)+\text{sen}(2x)\right] + e^{2x}\left[1-\cos(2x)+\text{sen}(2x)\right]'$$

$$= 2e^{2x}\left[1-\cos(2x)+\text{sen}(2x)\right] + e^{2x}\left[\text{sen}(2x)\cdot 2 + \cos(2x)\cdot 2\right]$$

$$= 2e^{2x}\left[1-\cancel{\cos(2x)}+\text{sen}(2x)+\text{sen}(2x)+\cancel{\cos(2x)}\right]$$

$$= 2e^{2x}\left[1+2\,\text{sen}(2x)\right].$$

$$y''_{(x=0)} = 2e^{2\cdot 0}\left[1+2\,\text{sen}(0)\right] = 2 \cdot > 0$$

Logo neste ponto a funsão tem um mínimo relativo.

Extremos absolutos

$f(x=-\tfrac{1}{2}) = e^{2(-\frac{1}{2})}\, sen^2(-\tfrac{1}{2}) = \dfrac{sen^2(-\frac{1}{2})}{e} = \left(\dfrac{-sen(\frac{1}{2})}{e}\right)^2$

$f(x=\tfrac{1}{2}) = e^{2(\frac{1}{2})}\, sen^2(\tfrac{1}{2}) = e\, sen^2(\tfrac{1}{2})$ máximo absoluto

$f(x=0) = e^0\, sen^2 0 = 0.$ mínimo absoluto

Q4) P2 1/2006

Q5) curva 1 $\Rightarrow y = ax+b$

$\left.\begin{array}{l} 1 = a+b \\ 4 = 4a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1-b$

$4 = 4(1-b)+b$

$\cancel{4} = \cancel{4} - 4b + b \Rightarrow 0 = -3b \Rightarrow b = 0. \Rightarrow a = 1$

$y = x$

curva 2 $\Rightarrow y = ax^2+bx+c$

$\left.\begin{array}{l} 4 = c \\ 0 = 4a+2b+c \\ 4 = 16a+4b+c \end{array}\right\}$

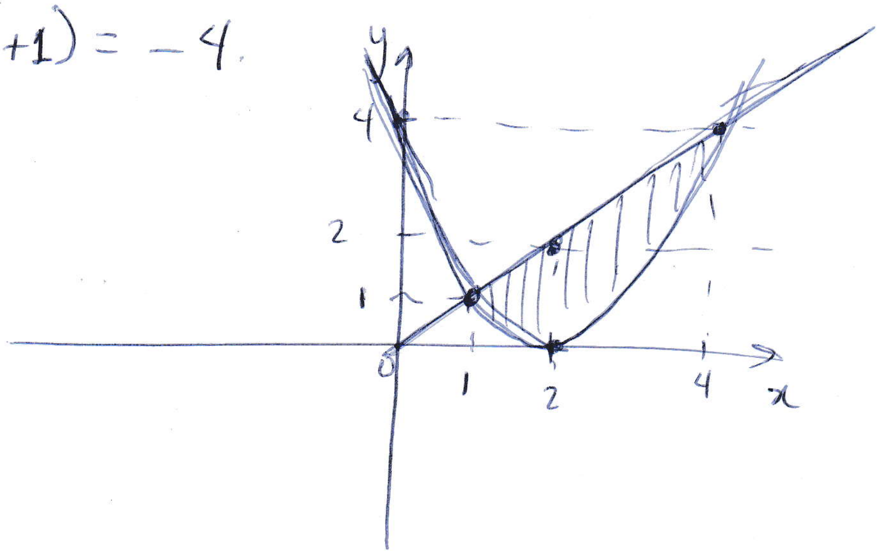
$0 = 4a+2b+4.$

$4 = 16a+4b+4$

$\left.\begin{array}{l} 0 = 2a+b+2 \\ 1 = 4a+b+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow b = -2(a+1) \\ \Rightarrow \cancel{1} = 4a - 2(a+1) + \cancel{1} \Rightarrow 2a-2=0 \end{array}$

$a = 1. \Rightarrow b = -2(1+1) = -4.$

$y = x^2 - 4x + 4.$



$$A = \int_1^4 \left[x - (x^2 - 4x + 4) \right] dx = \int_1^4 \left[x - x^2 + 4x - 4 \right] dx =$$

$$= \int_1^4 \left[-x^2 + 5x - 4 \right] dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 5\frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right)$$

$$= 4^2 \left(-\frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 1 \right) - \left(\frac{-2 + 15 - 24}{6} \right)$$

$$= 4^2 \left(\frac{-8 + 15 - 6}{6} \right) - \frac{-11}{6} = 4^2 \frac{1}{6} + \frac{11}{6} = \frac{16 + 11}{6} = \frac{27}{6}$$