Verificação de Reposição. Cálculo I 01/2006

Prof: Gustavo Benitez Alvarez.

Favor responder com clareza e limpeza. As respostas deverão ser justificadas.

1) Determine o domínio de definição da função:

$$f(x) = (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{x} + \cos(x), \quad a > 0.$$

2) Determine o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \left[ \frac{x}{x+a} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} + \left( \frac{5x+2}{4x+2} \right)^{\frac{1}{x}} \right]$$

3) Determine o diferencial de primeira ordem da função:

$$f(x) = x^3 \ln(x) + e^{3x} \cos(x)$$

4) Determine o comprimento da curva $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a > 0$.

5) Encontre as primitivas da função:

$$f(x) = (x-2)^3 e^{(x-2)} + \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \ln(x).$$

Ou seja $$\int \left[ (x-2)^3 e^{(x-2)} + \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \ln(x) \right] dx$$

---

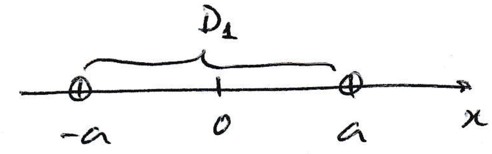
Obs: Todas as questões valem 2 pontos.

Prof. Gustavo Benitez Alvarez.

1) $f(x) = \underbrace{(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{f_1(x)} + \underbrace{\sqrt{x}}_{f_2(x)} + \underbrace{\cos(x)}_{f_3(x)}.$

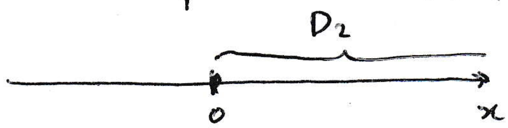
A funsão $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ está definida para valores reais de $x$ se $a^2-x^2>0$ ou $x^2<a^2 \Rightarrow |x|^2<a^2$ ou $-a<x<a$.

$D_1 = \{x\in\mathbb{R}, \text{ tal que } -a<x<a\}$



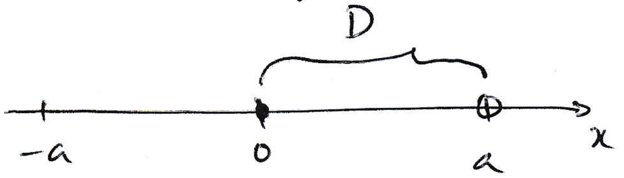

A funsão $f_2(x) = \sqrt{x}$ está definida quando $x \geq 0$.

$D_2 = \{x\in\mathbb{R}, \text{ tal que } x\geq 0\}$




A funsão $f_3(x) = \cos(x)$ está definida quando $x\in\mathbb{R}$.

O domínio de definisão da funsão $f(x)$ corresponde à interseção dos conjuntos $D_1 \cap D_2 \cap D_3$




$D = \{x\in\mathbb{R}, \text{ tal que } 0\leq x<a\}$.

2)
$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x+a} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} + \left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+a}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x(1+\frac{a}{x})}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(2\cos(x))\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$

$= 2$, já que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{5x+2}{4x+2} - 1\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{4x+2}$ temos que

$x = \frac{2z}{1-4z}$ e quando $x \to 0$ $z \to \lim_{x \to 0} \frac{x}{(4x+2)} = 0$. Logo nosso

limite $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1-4z}{2z}} = \lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{2z}}(1+z)^{-2}\right] =$

$= \lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1}{2}} \lim_{z\to 0}(1+z)^{-2} = e^{\frac{1}{2}}$. Portanto nosso limite

original $L$ será:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+a}\right) + \lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0 + 2 + e^{\frac{1}{2}} = 2 + e^{\frac{1}{2}}.$$

---

3) $f(x) = \underbrace{x^3 \ln(x)}_{f_1} + \underbrace{e^{3x} \cos(x)}_{f_2}$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln(x)) = \frac{d}{dx}(x^3)\ln(x) + x^3 \frac{d}{dx}(\ln(x))$$

$$= 3x^2 \ln(x) + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2\ln(x) + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$$

$$= x^2(\ln x^3 + 1).$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{3x}\cos x) = \frac{d}{dx}(e^{3x})\cos x + e^{3x}\frac{d(\cos(x))}{dx} =$$

$$= e^{3x}\frac{d(3x)}{dx}\cos x + e^{3x}(-sen x) = 3e^{3x}\cos x - e^{3x} sen x =$$

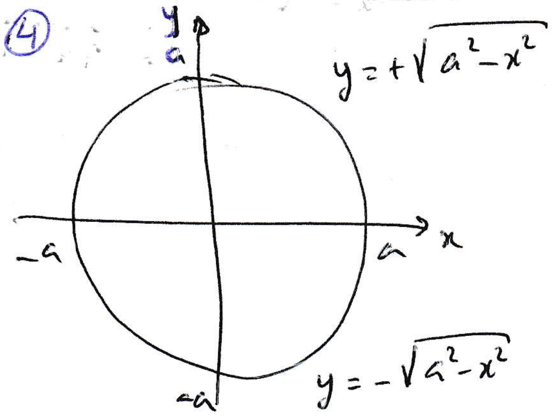
$= e^{3x}(3\cos x - sen x)$. Logo $\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} =$

$\frac{df}{dx} = x^2(\ln x^3 + 1) + e^{3x}(3\cos x - sen x)$ e o diferencial

de primeira ordem é: $df = \frac{df}{dx}dx$,

$$df = \left[x^2(\ln x^3 + 1) + e^{3x}(3\cos x - sen x)\right] dx.$$

④ 




$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Derivando a equação da circunferência temos.

$$\frac{d}{dx}\left[x^2+y^2\right]=\frac{d(a^2)}{dx}=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0 \Rightarrow$$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ ou $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$, onde

$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Como a circunferência é simétrica, o comprimento seria quatro vezes o comprimento da parte que se encontra no primeiro quadrante.

$$\frac{L}{4}=\int_0^a\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx$$

$$=\int_0^a\sqrt{\frac{a^2}{y^2}}\,dx=\int_0^a\frac{a}{y}\,dx=a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

fazendo a mudança de variavel $x=a\,\text{sen}\,t$ segue que $dx=a\cos t\,dt$ e $t=\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\Rightarrow t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{L}{4}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2-a^2\text{sen}^2t}}=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\sqrt{a^2(1-\text{sen}^2t)}}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{\cos t}=$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=a\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=a\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{a\pi}{2}.$$ Logo

$$L=4\frac{a\pi}{2}=2\pi a.$$

5) $$\int \Big[ \underbrace{(x-2)^3 e^{(x-2)}}_{f_1(x)} + \underbrace{\text{sen}(x)\cos(x)}_{f_2(x)} + \underbrace{\ln(x)}_{f_3(x)} \Big] dx$$

$$\int \big[ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \big] dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \int f_3(x)\, dx .$$

$$\int f_1(x)\, dx = \int (x-2)^3 e^{(x-2)} dx$$ fazendo $z = x-2 \Rightarrow dz = dx$

$$= \int z^3 e^z dz$$ integrando por parte $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$u = z^3 \Rightarrow du = 3z^2 dz.$

$dv = e^z dz \Rightarrow v = e^z$

$$= z^3 e^z - \int e^z\, 3z^2 dz$$ que integrando por parte novamente

$u = z^2 \Rightarrow du = 2z\, dz$

$dv = e^z \cancel{dz} \Rightarrow v = e^z$

$$= z^3 e^z - 3 \int \cancel{z}^2 e^z dz$$

$u = z \Rightarrow du = dz$

$dv = e^z dz \Rightarrow v = e^z.$

$$= z^3 e^z - 3 \Big\{ z^2 e^z - \int 2z\, e^z dz \Big\}$$

$$= z^3 e^z - 3 \Big\{ z^2 e^z - 2\Big[ z e^z - \int e^z dz \Big] \Big\} =$$

$$= z^3 e^z - 3 \Big\{ z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z \Big\} =$$

$$= e^z \Big\{ z^3 - 3z^2 + 6z - 2 \Big\} = e^{(x-2)} \Big\{ (x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 6(x-2) - 2 \Big\} + C_1$$

$$\int f_2(x)\, dx = \int \text{sen}\, x \cos x\, dx = \int \text{sen}\, x\, d(\text{sen}\, x) = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + C_2$$

$$\int f_3(x)\, dx = \int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + C_3$$

Logo $$\int f(x)\, dx = e^{(x-2)} \Big\{ (x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 6(x-2) - 2 \Big\} + \frac{\text{sen}^2 x}{2} + x(\ln x - 1) + C$$