UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________________
Assinatura do Aluno: ______________________________

Prova Escrita VR Turma V 01/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,0) Determine, se possível, o seguinte limite: $\lim_{x\to 0}\left[tg(x)\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$.

Questão 2: (Valor 2,0) Seja $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+a}+\frac{sen2x}{x}+\left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x\neq 0\\ 2+e^{a}, & \text{se } x=0\end{cases}$. Como deve ser escolhido o número "a" para que a função seja continua em x=0.

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x)=sen(x)\cos(x)$ no intervalo $[0,\pi]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Calcule o comprimento daciclóide dada por $\begin{cases}x(t)=a(t-sent)\\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$ no intervalo $0\leq t\leq 2\pi$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas: $y_1=x^2-2x+1$ e $y_2=-x^2+2x+1$.

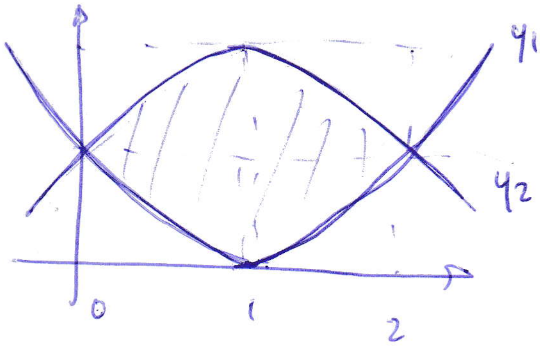
VR

5) Comprimento da ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$
$t \in [0, 2\pi]$. já está respondida

4) Área entre as curvas $y_1 = x^2 - 2x + 1$ e $y_2 = -x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0$ e $x = 2$.



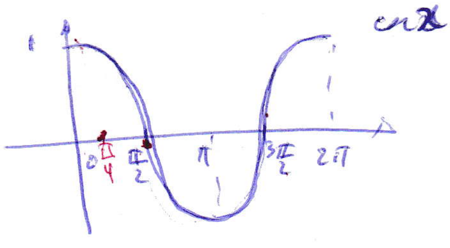
$$A = \int_0^2 |y_2 - y_1|\, dx \quad \text{como } y_2 \geq y_1 \; \forall x \in [0,2]$$

$$A = \int_0^2 (y_2 - y_1)\, dx = \int_0^2 \left[(-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[-2x^2 + 4x\right] dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^2 = -\frac{2}{3}(2^3 - 0) + 2(2^2 - 0)$$

$$= -2 \cdot \frac{8}{3} + 8 = 8\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

3) Encontre os extremos relativos e absolutos no intervalo $x \in [0, \pi]$ de $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x. = \frac{1}{2}\underbrace{2 \operatorname{sen} x \cos x}_{\operatorname{sen}(2x)}$



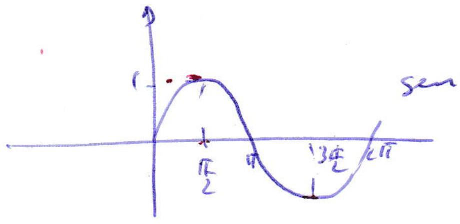
- Extremos relativos.

condição necessária $y' = 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

$y' = \frac{1}{2}\cos(2x)(2x)' = \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$ e $2x = \frac{3\pi}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

condição suficiente. $y'' \gtrless 0$



$y'' = [\cos(2x)]' = -2\operatorname{sen}(2x)$

$y''(x_1 = \frac{\pi}{4}) = -2\operatorname{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -2 < 0$ máximo relativo

$y''(x_2 = \frac{3\pi}{4}) = -2\operatorname{sen}(2\,\frac{3\pi}{4}) = (-2)\cdot(-1) = 2 > 0$ mínimo relativo.

Extremos absolutos

$y(x=0) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = 0$

$y(x=\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ máximo absoluto

$y(x=\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ mínimo absoluto.

$y(x=\pi) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi) = 0$

Em $x_1 = \frac{\pi}{4}$ temos máximo absoluto e relativo, e $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ mínimo absoluto e relativo.

---

2) Como deve ser escolhido "a" para que em $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+a} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} + \left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 + e^{a} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

seja contínua

i) $f(x=0) = 2 + e^{a}$

ii) $\lim_{x \to 0} f(x) = L_1 + L_2 + L_3$

$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x+a} = 0$ se $a \neq 0$ e $L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$ se $a = 0$

$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} 2\cos x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$= 2 \cdot 1 = 2.$

$L_3 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5x+2}{4x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[1 + \frac{5x+2}{4x+2} - 1\right]^{1/x} = \lim_{x \to 0} \left[1 + \frac{x}{4x+2}\right]^{\frac{1}{x}}$

fazendo $z = \frac{x}{4x+2} \Rightarrow x = \frac{2z}{1-4z}$ e $x \to 0 \Rightarrow z \to 0$ logo,

$L_3 = \lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1-4z}{2z}} = \lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{2z}} (1+z)^{-2} = \lim_{z \to 0} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1}{2}} \lim_{z \to 0} (1+z)^{-2} =$

$= e^{\frac{1}{2}}$. Portanto $L = 0 + 2 + e^{\frac{1}{2}} = 2 + e^{\frac{1}{2}}$ se $a \neq 0$

e $L = 1 + 2 + e^{1/2}$ se $a = 0$.

iii) para que $f(x)$ seja contínua se deve verificar que $f(x=0) = 2 + e^{a} = \lim_{x \to 0} f(x) = 2 + e^{\frac{1}{2}}$. Portanto $a = \frac{1}{2}$ para que a função seja contínua em $x=0$.

D. Determine o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \cdot e \cdot \frac{1}{1} = e.$$