02/2006

UFF	**UFF – Universidade Federal Fluminense** **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ______________________ **Assinatura do Aluno:** ______________________ **Prova Escrita VR**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,0) Determine o domínio de definição e a imagem da função $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - sen^2 x}}$.

Questão 2: (Valor 2,0) Analise a existência do limite e determine-o se possível:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{5\ln[(1+2x-4)(1+x-2)] + \cos(x)sen(5x-10)}{5(x-2)}\right].$$

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = 2sen^2 x - \cos(2x)$ no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}$. Isto é, calcule

$$\int \frac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}dx\ ?$$

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $(x+a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $(x+a)^2 + (y+a)^2 = a^2$ e $(x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2$, onde $a > 0$.

Verificação de Reposição Cálculo I 02/2006

Resposta. Gustavo Benitez Alvarez.

① Determine o domínio de definição e a imagem da função: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$.

$f_1(x) = \sqrt{x}$

$f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$

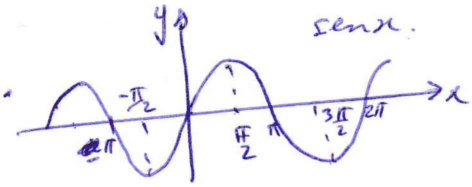
Domínio: $f_1(x) = \sqrt{x}$ $\quad D f_1(x) = \{x \in \mathbb{R} / \; x \geq 0\}$.

$D f_2(x) = \{x \in \mathbb{R} /$

$1 - \operatorname{sen}^2 x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \leq 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \neq 1$, ou seja,

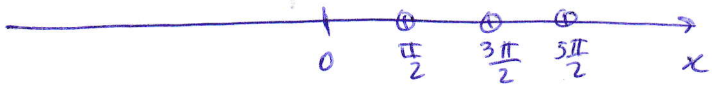
$\operatorname{sen} x \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n = 0, 1, \ldots$

$x \neq -\frac{\pi}{2} - n\pi, \; n = 0, 1, \ldots$



ou seja, $x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ ou $x \neq -\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\operatorname{Dom} f(x) = D f_1(x) \cap D f_2(x)$



$= \{x \in \mathbb{R} / \; x \geq 0 \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

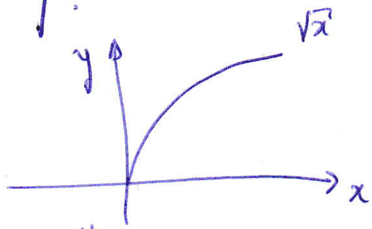
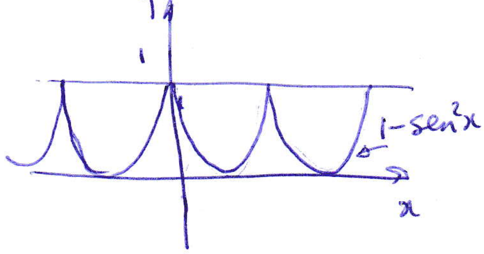


Imagem: $\operatorname{Im} f_1(x) = \{y \in \mathbb{R} / \; y \geq 0\}$.



$\operatorname{Im} f_2(x) = \{y \in \mathbb{R} / 1 \leq y \leq +\infty\}$.

$\operatorname{Im} f(x) = \{y \in \mathbb{R} / \; 0 \leq y \leq +\infty\}$.

② Analise a existência do limite e determine e possível.

$$L = \lim_{x \to 2} \left[\frac{5 \ln(1+2x-4)(1+x-2) + \cos(x) \operatorname{sen}(5x-10)}{5(x-2)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{5 \ln[(2x-3)(x-1)] + \cos(x) \operatorname{sen}(5x-10)}{5(x-2)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\ln[(2x-3)(x-1)]}{(x-2)} + \lim_{x \to 2} \frac{\cos(x) \operatorname{sen}(5x-10)}{5(x-2)} =$$

$u = x-2$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\ln[(2(u+2)-3)(u+2-1)]}{u} + \lim_{x \to 2} \frac{\cos x \operatorname{sen}(5(x-2))}{5(x-2)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\ln[(2u+1)(u+1)]}{u} + \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u+2) \operatorname{sen}(5u)}{5u}$$

$$= \underbrace{\lim_{u \to 0} \frac{\ln(2u+1)}{u}}_{L1} + \underbrace{\lim_{u \to 0} \frac{\ln(u+1)}{u}}_{L2} + \underbrace{\lim_{u \to 0} \frac{\cos(u+2) \operatorname{sen}(5u)}{5u}}_{L3}$$

$L1 = \lim_{u \to 0} \frac{2u}{u} = 2$, já que $\ln(2u+1) \sim 2u$ quando $u \to 0$

$L2 = \lim_{u \to 0} \frac{u}{u} = 1$, já que $\ln(1+u) \sim u$ quando $u \to 0$

$$L3 = \lim_{u \to 0} \cos(u+2) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5u)}{5u} = \cos(2) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{5u}{5u} = \cos(2).$$

Logo $L = L_1 + L_2 + L_3 = 2 + 1 + \cos(2) = 3 + \cos 2.$

3 Determine os extremos relativos e absolutos da função: $f(x) = 2\,sen^2 x - cos(2x)$ no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

condição necessaria:

$f'(x) = 0$ $\qquad f'(x) = 4\,sen\,x \cdot cos\,x + 2\,sen(2x)$

$$= 2\,sen(2x) + 2\,sen(2x) = 4\,sen(2x) = 0$$

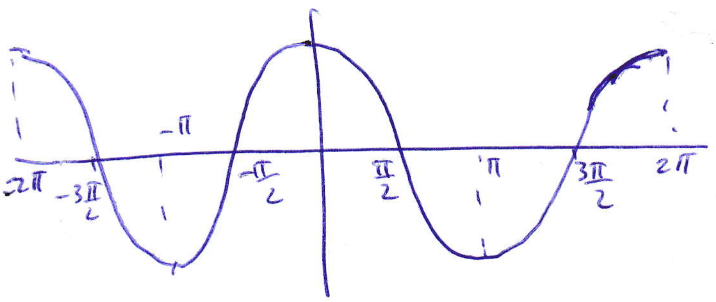
$sen(2x) = 0 \Rightarrow 2x = n\pi, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$x = n\frac{\pi}{2}$

condição suficiente:

$$f''(x) = \left[4\,sen(2x)\right]' = 4\,cos(2x)\cdot 2 = 8\,cos(2x)$$

$$f''\left(x = n\frac{\pi}{2}\right) = 8\,cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 8\,cos(n\pi) = \begin{cases} > 0 & \text{se } n = 0, 2, 4, \ldots \; -2, -4 \ldots \\ < 0 & \text{se } n = 1, 3, 5 \ldots \; -1, -3, -5. \end{cases}$$



Logo a função possue mínimos relativos se $x = n\frac{\pi}{2}$, $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4 \ldots$ ou se $x = 2K\frac{\pi}{2}$, onde $K \in \mathbb{Z}$ inteiros. A função possue máximos relativos se $x = n\frac{\pi}{2}$, $\ldots, -5, -3, -1, 1, 3 \ldots$ ou se $x = (2K-1)\frac{\pi}{2}$, onde $K \in \mathbb{Z}$.

Avaliando a função nos extremos do intervalo e nos possiveis pontos críticos temos:

$f(-4\pi) = 2\,sen^2(-4\pi) - cos(2(-4\pi)) = 2\,sen^2(4\pi) - cos(8\pi) = 0 - 1 = -1$.

$f(4\pi) = 2\,sen^2(4\pi) - cos(8\pi) = -1$

$$f\left(x = 2K\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\mathrm{sen}^2(K\pi) - \cos(2K\pi) = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(x = (2K-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\mathrm{sen}^2\left[(2K-1)\frac{\pi}{2}\right] - \cos[\cancelto{-1}{(2K-1)\pi}]$$

$$= 2\left[\mathrm{sen}(K\pi)\cancelto{0}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} - \cos(K\pi)\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 + 1$$

$$= 2\cos^2(K\pi)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2\cos^2(K\pi) + 1$$

$$\cos(K\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } K = 0, 2, -2 \\ -1, & \text{se } K = 1, 3, -1, -3 \end{cases}$$

$$f\left(x = (2K-1)\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 3, & \text{se } K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto a função apresenta os mínimos absolutos nos pontos $x = \{-4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$.

Os máximos absolutos e relativos são alcançados nos pontos:

$$x = \left\{-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$$

---

(4) Encontre as primitivas da função $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}$.

Isto é, calcule $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}\,dx$?

$$I = \int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)}\,dx \quad \text{por frações simples.}$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x+2) + A_2(x+2) + B(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$(2x+3) = A_1(x^2+\underbrace{2x-x}_{x}-2) + A_2(x+2) + B(x^2-2x+1)$$

$$= x^2(A_1+B) + x(A_1+A_2-2B) + x^0(-2A_1+2A_2+B)$$

$x=-2 \Rightarrow -1 = 0A_1 + A_2 0 + 9B \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$x=0 \Rightarrow 3 = -2A_1+2A_2+B \Rightarrow 3 = 2(A_2-A_1)-\frac{1}{9}$ | $*9$

$x=2 \Rightarrow 7 = 4A_1+4A_2+B \Rightarrow 7 = 4(A_2+A_1)-\frac{1}{9}$ | $*9$

$28 = 18(A_2-A_1) \Rightarrow 56 = 36(A_2-A_1)$

$64 = 36(A_2+A_1) \Rightarrow 64 = 36(A_2+A_1)$

~~$106 = 72A_2$~~

~~$A_2 = \frac{106}{72} = \frac{53}{36}$~~

~~$6 = -72A_1 \Rightarrow A_1 = -\frac{6}{72} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$~~. erro de conta

$A_1 = \frac{1}{9}$ e $A_2 = \frac{5}{3}$

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \cancel{-\frac{1}{12}}\frac{1}{9}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5\cancel{3}}{3\cancel{6}}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)}$$

$$I = \frac{1}{9\cancel{12}}\underbrace{\int\frac{1}{(x-1)}dx}_{I1} + \frac{5\cancel{3}}{3\cancel{6}}\underbrace{\int\frac{1}{(x-1)^2}dx}_{I2} - \frac{1}{9}\underbrace{\int\frac{1}{(x+2)}dx}_{I3}$$

$$I1 = \int\frac{1}{(x-1)}dx = \int\frac{d(x-1)}{(x-1)} = \ln|x-1| + C_1$$

$$I2 = \int\frac{1}{(x-1)^2}dx = \int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C_2 = -\frac{1}{(x-1)} + C_2$$

$$I3 = \int\frac{1}{(x+2)}dx = \int\frac{d(x+2)}{(x+2)} = \ln|x+2| + C_3$$

$$I = \cancel{-}\frac{1}{9\cancel{12}}\ln|x-1| - \frac{5\cancel{3}}{3\cancel{6}}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{9}\ln|x+2| + C$$

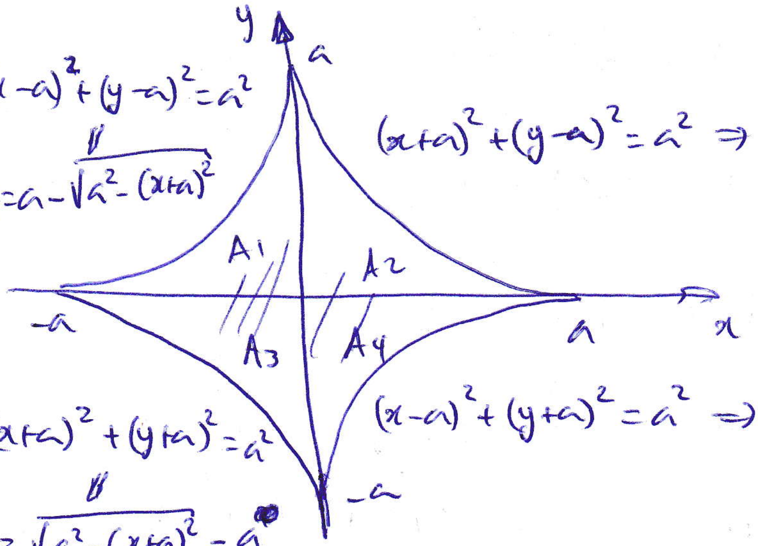
---

5) Calcule a área da figura plana limitada pelas curvas: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$, $(x+a)^2+(y+a)^2=a^2$, $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$, onde $a>0$.

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$\Downarrow$

$y=a-\sqrt{a^2-(x+a)^2}$



$(x+a)^2+(y-a)^2=a^2 \Rightarrow y = a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}$

$(x-a)^2+(y+a)^2=a^2 \Rightarrow y=\sqrt{a^2-(x-a)^2}-a$

$(x+a)^2+(y+a)^2=a^2$

$\Downarrow$

$y=\sqrt{a^2-(x+a)^2}-a$

$$A_1 = \int_{-a}^{0}\left[a-\sqrt{a^2-(x+a)^2}\right]dx = ax\Big|_{-a}^{0} - \int_{-a}^{0}\sqrt{a^2-(x+a)^2}\,dx$$

$x+a = a\,\operatorname{sen} t$

$$= a^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\; a\cos t\,dt = a^2-\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2 - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = a^2 - a^2\frac{\pi}{4} = a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = 4A_1 = a^2(4-\pi)$$