	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ____________________** **Assinatura do Aluno: ____________________** **Prova Escrita VS Turma V1 01/2008**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Seja *f(x)* definida no intervalo [1,3]. Analise a continuidade dela no ponto $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{tg(x)}, & \text{se } x < 2 \\ 2, & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{\ln(2x-3)^2}{(2x-4)}, & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Questão 2: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função $f(x) = \dfrac{(2x)^{4x} e^{2x}}{\sqrt{2x}}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = 2sen^2(2x) - \cos(4x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x) = x\ln(x+1)^{3x}$. Isto é, calcule $\int x\ln(x+1)^{3x}\, dx$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva hiperbólica $y = ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ no intervalo $x \in [\ln(1), \ln(2)]$ ao redor do eixo OX.

1) continuidade em $x=2$?

i) $f(x=2) = 2$.

ii) $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{tg(x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2\cdot 2}{\operatorname{sen}(2)} \cdot \cos(2) = 4\,\frac{\cos(2)}{\operatorname{sen}(2)}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(2x-3)^2}{(2x-4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2\ln(2x-3)}{(2x-4)}$$

fazendo $z = 2x-4$ segue que $\lim_{x\to 2^+}(2x-4) = 0^+$

$$= \lim_{z\to 0^+} \frac{2\ln(z+1)}{z} = 2\lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z}$$

sabendo que $\ln(1+z) \sim z$, quando $z \to 0$

$$= 2\lim_{z\to 0^+} \frac{z}{z} = 2.$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ não existe o limite no ponto $\lim_{x\to 2} f(x)$. Consequentemente a função é descontínua neste ponto.

4) $f(x) = x\ln(x+1)^{3x} = 3x^2\ln(x+1)$.

$$I = \int x\ln(x+1)^{3x}\,dx = \int 3x^2\ln(x+1)\,dx$$

integração por parte duas vezes.

$$= 3\int x^2\ln(x+1)\,dx.$$

$u = \ln(x+1)$

$du = \frac{1}{(x+1)}\cdot dx$.

$dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x+1}\,dx\right]$$

Fazendo $z = x+1 \Rightarrow dz = dx$ e

$$\int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{1}{3}\frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z}\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[z^2-3z+3-\frac{1}{z}\right]dz = \frac{1}{3}\left[\frac{z^3}{3} - 3\frac{z^2}{2}+3z-\ln|z|\right]+C$$

Logo: $I = 3\left[\frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\left(\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{3}{2}(x+1)^2+3(x+1)-\ln|x+1|\right)\right]+C$

$$= x^3\ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{3}+\frac{3}{2}(x+1)^2-3(x+1)+\ln|x+1|+C$$

---

2) $f'(x) = \dfrac{\left((2x)^{4x}e^{2x}\right)'\sqrt{2x} - (2x)^{4x}e^{2x}\left(\sqrt{2x}\right)'}{\left(\sqrt{2x}\right)^2}$

$\left(\sqrt{2x}\right)' = \frac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, $\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}$.

$$\left[(2x)^{4x}e^{2x}\right]' = \left[(2x)^{4x}\right]'e^{2x} + (2x)^{4x}\left(e^{2x}\right)'$$

$y=(2x)^{4x} \Rightarrow \ln y = \ln(2x)^{4x} = 4x\ln(2x)$ derivando

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (4x)'\cdot\ln(2x)+(4x)\cdot[\ln(2x)]'$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[4\ln(2x)+(4x)\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2\right] = (2x)^{4x}\left[4\ln(2x)+4\right].$$

$$\left[(2x)^{4x}\right]' = (2x)^{4x}\left[4\left(\ln(2x)+1\right)\right]$$

$$\left[(2x)^{4x} e^{2x}\right]' = (2x)^{4x}\, 4(\ln(2x)+1)\, e^{2x} + (2x)^{4x}\, 2e^{2x}$$

$$= e^{2x}(2x)^{4x}\left[4(\ln(2x)+1)+2\right]$$

$$= 2e^{2x}(2x)^{4x}\left[2(\ln(2x)+1)+1\right].$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(2x)^{4x}\left[2\ln(2x)+3\right]\sqrt{2x} - (2x)^{4x}e^{2x}\frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{4x\, e^{2x}(2x)^{4x}\left[2\ln(2x)+3\right] - (2x)^{4x}e^{2x}}{2x\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x)^{4x}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}\left[4x(2\ln(2x)+3) - 1\right]$$

$$df = \frac{df}{dx}\cdot dx$$

$$df = e^{2x}(2x)^{(4x-\frac{3}{2})}\left[4x(2\ln(2x)+3) - 1\right] dx.$$

Q5) provas velhas.

Q3) Extremos relativos.

- Condição necessária $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \left(2\,\text{sen}^2(2x)\right)' - \left(\cos(4x)\right)'$$

$$= 2\; 2\,\text{sen}(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2 - (-\,\text{sen}\,4x)\cdot 4$$

$$= 4\cdot 2\,\text{sen}(2x)\,\cos(2x) + 4\,\text{sen}(4x).$$

$$= 4\cdot\text{sen}(4x) + 4\,\text{sen}(4x) = 8\,\text{sen}(4x) = 0 \quad \text{se}$$

$4x = 0$, $4x = \pi$ e $4x = 2\pi$

$x = 0$ $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{2}$

- Condição suficiente $f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{máximo relativo} \\ > 0 & \text{mínimo relativo} \end{cases}$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(8\,\text{sen}(4x)\right)' = 8\cos(4x)\cdot 4 = 32\cos(4x).$$

$f''(x=0) = 32\cdot\cos 0 = 32 > 0$ mínimo relativo

$f''(x=\frac{\pi}{4}) = 32\cos(4\frac{\pi}{4}) = 32(-1) = -32 < 0$ máximo relativo

$f''(x=\frac{\pi}{2}) = 32\cos(4\cdot\frac{\pi}{2}) = 32\cos(2\pi) = 32 > 0$ mínimo relativo

Extremos absolutos

$f(x=0) = 2\,\text{sen}^2(2\cdot 0) - \cos(4\cdot 0) = 0 - 1 = -1$

$f(x=\frac{\pi}{4}) = 2\,\text{sen}^2(2\cdot\frac{\pi}{4}) - \cos(4\frac{\pi}{4}) = 2\,\text{sen}^2(\frac{\pi}{2}) - \cos(\pi) = 2 - (-1) = 3$

$f(x=\frac{\pi}{2}) = 2\,\text{sen}^2(2\frac{\pi}{2}) - \cos(4\frac{\pi}{2}) = 2\,\text{sen}^2(\pi) - \cos(2\pi) = 0 - 1 = -1$

máximo absoluto e relativo alcançado em $x = \frac{\pi}{4}$ com valor $f(x=\frac{\pi}{4}) = 3$

mínimos absolutos e relativos alcançados em $x=0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ com valor da função $f(x) = -1$.