	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ____________________ **Assinatura do Aluno:** ____________________ **Prova Escrita VS Turma V1 02/2008**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Seja $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x\le 1 \\ 3-ax^2, & \text{se } x>1 \end{cases}$. Como deve ser escolhido o número $a \in \Re$ para que $f(x)$ seja contínua em $x = 1$?

Questão 2: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função $f(x)=\dfrac{(2x)^{4x}e^{2x}}{\sqrt{2x}}$.

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = 2sen^2(2x) - \cos(4x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x)=\sqrt{e^x+1}$. Isto é, calcule $\int\sqrt{e^x+1}\,dx$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva hiperbólica $y = ch(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ no intervalo $x \in [\ln(1), \ln(2)]$ ao redor do eixo OX.

Q1) $I = \int \sqrt{e^x+1}\, dx$

$$I = \int \frac{z \cdot 2z}{z^2-1}\, dz = 2\int \frac{z^2}{z^2-1}\, dz$$

$$= 2\int \left[1 + \frac{1}{z^2-1}\right] dz$$

$$= 2\left[\int dz + \int \frac{1}{z^2-1}\, dz\right]$$

$$= 2\left[z + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz\right]$$

$$= 2z + \int \frac{1}{z-1}\, d(z-1) - \int \frac{1}{z+1}\, d(z+1)$$

$$= 2z + \ln|z-1| - \ln|z+1| + C$$

$$= 2z + \ln\left(\frac{|z-1|}{|z+1|}\right) + C$$

$$= 2z + \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) + C.$$

fazendo $e^x+1 = z^2$ segue

$$d(e^x+1) = d(z^2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x+1) = \frac{d}{dz}(z^2)\, dz$$

$$e^x\, dx = 2z\, dz$$

$$dx = \frac{2z}{z^2-1}\, dz, \text{ logo.}$$

$$\frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2-1+1}{z^2-1} = 1 + \frac{1}{z^2-1}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} =$$

$$\frac{A(z+1)+B(z-1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{z(A+B)+A-B}{z^2-1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \quad A = 1+B \quad \begin{cases} 1+B+B=0 \\ 1+2B=0,\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$A = \frac{1}{2}$, logo $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$

$z = \sqrt{e^x+1}$, logo

Outra possibilidade:

$$I = \int \sqrt{e^x+1}\, dx$$

$$= \int \sqrt{z^2+1}\, \frac{2}{z}\, dz$$

fazendo $x = \ln z^2$ ou $e^x = z^2$

segue $dx = 2(\ln z)'dz = 2\frac{1}{z}dz$

fazendo $z = tg\, t$ segue

$dz = \frac{1}{\cos^2 t}dt$ e $z^2+1 = \frac{sen^2 t}{\cos^2 t} + 1 =$

②

$$= \int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen} t} \cos t \, \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= \int \frac{2 \cos t}{\operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t} \, dt = 2 \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t} \, dt = 2 \int \frac{d(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t} =$$

$$= 2 \int \frac{d(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen} t(1-\operatorname{sen}^2 t)} = 2 \int \frac{dw}{w - w^3} = 2 \int \frac{dw}{w(1-w^2)}$$

sendo $w = \operatorname{sen} t$. Como $\frac{1}{w(1-w^2)} = \frac{1}{w(w+1)(1-w)}$

$$= \frac{A}{w} + \frac{B}{1-w} + \frac{C}{1+w} = \frac{A(1-w^2) + B\,w(1+w) + C(1-w)\,w}{w(1-w)(1+w)}$$

$$= \frac{w^2(B - A - C) + w(B+C) + A}{w(1-w^2)}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B + C = 0 \Rightarrow B = -C \\ B - A - C = 0 \end{cases}$$

$$-C - 1 - C = 0$$

$$-2C - 1 = 0 \Rightarrow C = -\tfrac{1}{2}$$

$$B = \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{w(1-w^2)} = \frac{1}{w} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-w} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+w}$$

$$2 \int \frac{dw}{w(1-w^2)} = 2 \int \left[\frac{1}{w} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-w} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+w} \right] dw$$

$$= 2\left[\ln|w| + \frac{1}{2}\ln|1-w| - \frac{1}{2}\ln|1+w| \right] + C$$

$$= 2\ln|w| + \ln\left|\frac{1-w}{1+w}\right| + C = 2\ln|\operatorname{sen} t| + \ln\left|\frac{1-\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen} t}\right| + C$$

$$\operatorname{sen} t = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + 1}} = \sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}} = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$$

$$I = 2 \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}}{1+\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}}\right) + C.$$