UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ______________________
Assinatura do Aluno: ______________________
Prova Escrita VS Turma V2 01/2007

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,5) Seja $f(x)=\begin{cases}(xtg(x)\cot(x))^2+\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2+2x}, & \text{se } x\neq 0\\ 2+a, & \text{se } x=0\end{cases}$. Como deve ser escolhido o número "a" para que a função seja contínua em x=0.

Questão 2: (Valor 2,5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função de Gauss $f(x)=e^{-x^2}$ no intervalo $x\in[-1,1]$.

Questão 3: (Valor 2,5) Determine o comprimento da curva $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$, onde $a>0$ e $b>0$.

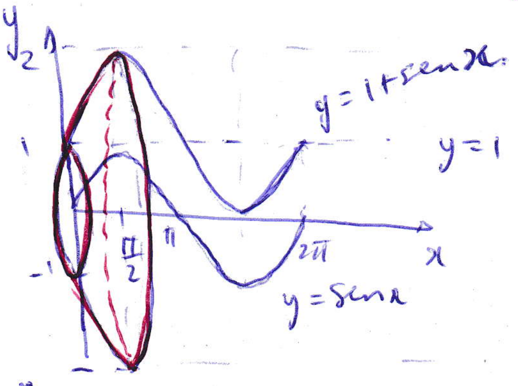
Questão 4: (Valor 2,5) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=1+sen(x)$ no intervalo $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ ao redor do eixo OX.

VS - V2

①

Calcule o volume do corpo de revolução gerado por rotação da curva $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ no redor do eixo OX

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen} x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + -2\pi \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]\, dx = \frac{\pi^2}{2} - 2\pi(0 - 1) + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx =$$

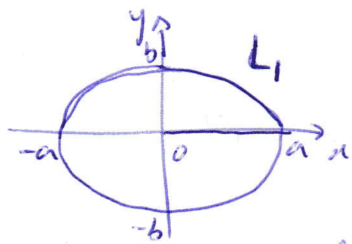
$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, d(2x) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi^2}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4}(\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0) = \frac{3\pi^2}{4} + 2\pi.$$

---

3) Calcule o comprimento da curva $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$



$L = 4 L_1$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] = \frac{d}{dx}(1)$$ derivada da função implícita

$$2\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a} + 2\left(\frac{y}{b}\right)\frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{b}{y}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{b}{y}\right)^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[b\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{b}{2}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{b}{2}\,\frac{2\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{b}{a}\,\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$B = \left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\underbrace{\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}_{B = cte}} = \sqrt{1 - B\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

fazendo ~~x...~~

$$\frac{x}{a} = z \Rightarrow dx = a\,dz$$

$$x \in [0,a] \Rightarrow z \in [0,1]$$

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1 - B\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{B}\sqrt{\frac{1}{B}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = a\sqrt{B}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{B}-z^2}\,dz = a\sqrt{B}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2 - z^2}\,dz$$

fazendo $z = \frac{1}{\sqrt{B}}\operatorname{sen} t \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{B}}\cos t\,dt$, $z\in[0,1] \Rightarrow t \in [0,t_1]$

$$L_1 = a\sqrt{B}\int_0^{t_1}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\operatorname{sen}^2 t}\;\frac{1}{\sqrt{B}}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{a}{|B|}\int_0^{t_1}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = \frac{a}{|B|}\int_0^{t_1}\cos^2 t\,dt$$

$$\cos(t+t) = \cos t\cos t - \operatorname{sen} t\operatorname{sen} t \Rightarrow \cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2t)\right]$$

$$L_1 = \frac{a}{|B|}\int_0^{t_1}\frac{1}{2}\left[1+\cos(2t)\right]dt = \frac{a}{2|B|}\left[t\Big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1}\frac{\cos(2t)}{2}\,d(2t)\right] =$$

$$= \frac{a}{2|B|}\left[t_1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\Big|_0^{t_1}\right] = \frac{a}{2|B|}\left[t_1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t_1)\right] =$$

$$= \frac{a^3}{2|1-(\frac{b}{a})^2|}\left[\operatorname{arcsen}(\sqrt{B}) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[2\operatorname{arcsen}(\sqrt{B})\right]\right]$$

$$= \frac{a^3}{2|(a^2-b^2)|}\left[\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[2\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\right]\right]$$

Logo $L = 4L_1$.

---

2) $f(x) = e^{-x^2}$ em $[-1,1]$

- Extremos relativos.

condição necessária $y' = 0$ regra da cadeia

$$\frac{df}{dx} = \left[e^{-x^2}\right]' = e^{-x^2}\frac{d}{dx}(-x^2) = e^{-x^2} - 2x = -2x\,e^{-x^2} = 0$$

Logo $x=0$. é o ponto crítico.

condição suficiente $y'' \gtrless 0$.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -2\,\frac{d}{dx}\left(x\,e^{-x^2}\right] = -2\left[e^{-x^2} + x(-2x\,e^{-x^2})\right] =$$

$$= -2\left[e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}\right] = -2\,e^{-x^2}\left[1-2x^2\right]$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x=0) = -2\,e^{-0^2}\left[1-2\cdot 0^2\right] = -2 < 0$$ Logo em $x=0$ existe um máximo relativo.

- Extremos absolutos.

$f(x=0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$. máximo absoluto

$f(x=-1) = e^{-(-1)^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$) mínimos absolutos.

$f(x=1) = e^{-1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$.

Em $x=0$ a função alcança seu máximo relativo e absoluto.

Em $x=-1$ e $x=1$ a função alcança seu mínimo absoluto

1) Função contínua condições:

i $f(x=0) = 2+a$ definida.

ii $$\lim_{x\to 0}\left\{\left[x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cot x\right]^2 + \frac{x^3-5x^2+6x}{x^2+2x}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^2 + \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2+2x}\right]$$ se existirem os limites por separado

$$= \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-5x+6)}{x(x+2)} = 0 + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-5x+6}{x+2}\right)$$

$$= 0 + \frac{6}{2} = 3.$$

iii $\lim_{x\to 0} f(x) = f(x=0) \Rightarrow 3 = 2+a$ ou $a=1$ para que a função seja contínua.