	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ______________________** **Assinatura do Aluno: ______________________________** **Prova Escrita VS Turma V3 01/2010**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação faz parte da Avaliação;**
- **Faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta.</u> Respostas à lápis não terão direito a recorreção;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) A função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(ax)}{bx}, & \text{se } x \neq 0\\ 2, & \text{se } x=0\end{cases}$ está definida $\forall x \in \mathrm{IR}$. Como devem ser escolhidos os números a e b para que $f(x)$ seja continua em $x=0$?

Questão 2: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função

$$f(x)=\frac{e^{(2x)}sen(2x)}{x^2}.$$

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $y=(x-1)^2(x-3)$ no intervalo $x \in [0, 4]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+x}$. Isto é, calcule $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule o comprimento da curva definida por $y=x^2$ no intervalo $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Fórmulas: $L=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$; $L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; $V_x=\pi\displaystyle\int_a^b[f(x)]^2dx$;

$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0$; $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\quad a\neq 0$;

$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos(x)}=\ln|\sec(x)+tg(x)|+C,\quad a\neq 0$; $\dfrac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$

(Q1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{bx}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Para $f(x)$ ser continua em $x=0$ se deve verificar:

i) $f(x=0) = 2$ definida

ii) $\lim_{x \to 0} f(x)$ deve existir

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{b} = \frac{a}{b},$$

já que $\operatorname{sen}(ax) \sim ax$ quando $x \to 0$.

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(x=0) \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.

Logo, $f(x)$ só é contínua em $x=0$ se $b \in \mathbb{R}$ e $a = 2b$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

(Q2) $f(x) = \dfrac{e^{2x} \operatorname{sen}(2x)}{x^2}$ $\quad df = ? \quad df = \dfrac{df}{dx} \cdot dx$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{2x} \operatorname{sen}(2x)}{x^2} \right] = \frac{[e^{2x} \operatorname{sen}(2x)]' x^2 - [e^{2x} \operatorname{sen}(2x)](x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\left[(e^{2x})' \operatorname{sen}(2x) + e^{2x} (\operatorname{sen}(2x))' \right] x^2 - [e^{2x} \operatorname{sen}(2x)] 2x}{x^4}$$

$$= \frac{[e^{2x} \cdot 2 \operatorname{sen}(2x) + e^{2x} \cos(2x) \cdot 2] x^2 - [e^{2x} \operatorname{sen}(2x)] 2x}{x^4}$$

$$= \frac{2e^{2x} [\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)] x - 2e^{2x} \operatorname{sen}(2x)}{x^3}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2e^{2x}\,\mathrm{cn}(2x)}{x^3}. \quad \text{Logo}$$

$$df = \frac{2e^{2x}\,\mathrm{cn}(2x)}{x^3}\,dx.$$

~~Erro~~ Falta x

Q3) $y = (x-1)^2(x-3) \qquad x \in [0,4]$

<u>Extremos Relativos</u>

Condição necessaria $\quad y' = 0$ ou $y' = \nexists$

$$y' = \left[(x-1)^2\right]'(x-3) + (x-1)^2\left[(x-3)\right]'$$

$$= 2(x-1)(x-3) + (x-1)^2 = (x-1)\left[2(x-3) + (x-1)\right]$$

$$= (x-1)\left[2x-6+x-1\right] = (x-1)(3x-7) = 0$$

$x - 1 = 0 \quad$ ou $\quad 3x - 7 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{7}{3} \qquad$ pontos críticos.

Condição suficiente

$$y'' = \begin{cases} > 0 & \text{mínimo relativo} \\ < 0 & \text{máximo relativo} \end{cases}$$

$$y'' = (y')' = \left[(x-1)(3x-7)\right]' = (x-1)'(3x-7) + (x-1)(3x-7)'$$

$$= (3x-7) + (x-1)\cdot 3 = 3x - 7 + 3x - 3 = 6x - 10$$

$$y'' = 2(3x-5)$$

para $x_1 = 1 \Rightarrow y''(x=1) = 2(3\cdot 1 - 5) < 0$. Logo neste ponto $f(x)$ tem um máximo relativo para $x_2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y''(x=\frac{7}{3}) = 2(3 \cdot \frac{7}{3} - 5) > 0$ Logo neste ponto $f(x)$ tem um mínimo relativo.

Extremos Absolutos

$f(x=0) = (0-1)^2(0-3) = -3$ mínimo absoluto

$f(x=1) = (1-1)^2(1-3) = 0$

$f(x=\frac{7}{3}) = (\frac{7}{3}-1)^2(\frac{7}{3}-3) = (\frac{4}{3})^2(-\frac{2}{3}) = -\frac{32}{27}$

$f(x=4) = (4-1)^2(4-3) = 3^2 \cdot 1 = 9.$

Logo, $f(x)$ tem o mínimo absoluto em $x=0$ e o máximo absoluto em $x=4$.

Q4) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$

$$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x} = \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)} = \frac{x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}. \text{ Logo.}$$

$x+2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + C(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. escolhemos para determinar os coeficientes A, B e C

para $x=0 \Rightarrow 0+2 = A(0-1)^2 + B \cdot 0(0-1) + C \cdot 0$

$\boxed{2 = A}$

para $x=1 \Rightarrow 1+2 = A(1-1)^2 + B \cdot 1(1-1) + C \cdot 1$

$\boxed{3 = C}$

para $x=2 \Rightarrow 2+2 = A(2-1)^2 + B \cdot 2(2-1) + C \cdot 2$

$4 = A + 2B + 2C \Rightarrow 4 = 2 + 2B + 2 \cdot 3$

$\Rightarrow 2 = 4 + B \Rightarrow \boxed{B = -2}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos 0 = 1 & \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 0 = 0 & \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln\left|\frac{1}{\cos 0} + \operatorname{tg} 0\right|$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1\right| - \cancelto{0}{\ln\left|1 + 0\right|} = \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right|$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} t \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\, dt$$

$$dv = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\, dt$$

$$v = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\, dt = -\int \frac{d(\cos t)}{\cos^3 t} = -\frac{\cos^{-3+1} t}{-3+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$u = \operatorname{sen} t$$

$$du = \cos t \cdot dt$$

fazendo integração por partes segue.

$$u \cdot v \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} v \cdot du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^3 t}\, dt = \operatorname{sen} t \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 t} \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} - \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos^2 0}\right] - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 0\right] - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right|.$$

logo

$$L = \frac{1}{2}\left\{\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right|\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$