uff	**UFF – Universidade Federal Fluminense** **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma): ______________________** **Assinatura do Aluno: ______________________** **Prova Escrita VS Turma V3 02/2011**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação faz parte da Avaliação;**
- **Faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta.</u> Respostas à lápis não terão direito a recorreção;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Analise a continuidade da função:

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{2}{\pi}\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right| & \text{se } x<\pi \\ sen(x) & \text{se } \pi\le x<3\dfrac{\pi}{2} \\ x^2-x & \text{se } x\ge 3\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Questão 2: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{3x}+1}{\cos(x)}\right)^4$.

Questão 3: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x)=2sen^2(2x)-\cos(4x)$ no intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Questão 4: (Valor 2,0) Determine o comprimento da curva $f(x)=e^x$ no intervalo $x\in[0,1]$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule a área da superfície de revolução gerada ao rotar entorno do eixo OX o laço da curva $9y^2=x(3-x)^2$.

Fórmulas: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$; $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; $A_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$;

$\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0$; $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}arctg\left(\dfrac{x}{a}\right)+C,\quad a\neq 0$;

$\int\dfrac{dx}{\cos(x)}=\ln\left|\sec(x)+tg(x)\right|+C,\quad a\neq 0$; $\dfrac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$

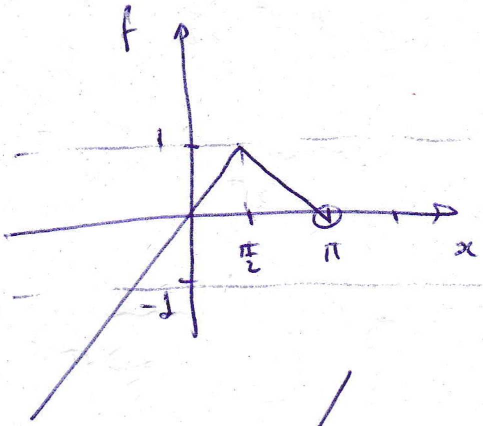
1) Continuidade de $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| & \text{se } x < \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ x^2 - x & \text{se } x \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

- para todo $x < \pi$ segue

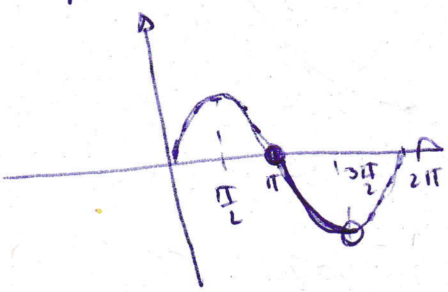
$$\left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \\ -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ ou seja

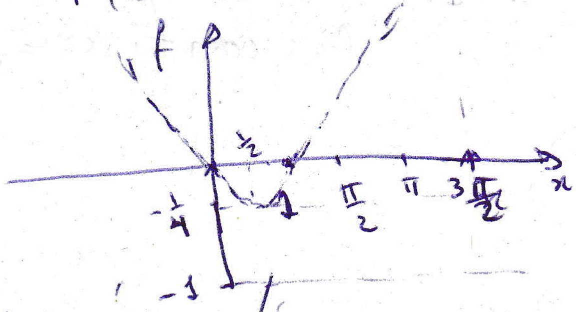
$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{\pi}x & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \frac{2}{\pi}x & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Neste intervalo $f(x)$ é contínua

- para todo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $f(x)$ é contínua





- para todo $x > \frac{3\pi}{2}$ $f(x)$ é contínua

- em $x = \pi$ segue

i) $f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \left(2 - \frac{2}{\pi}x\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} \operatorname{sen} x = 0$

logo $\lim_{x \to \pi} f(x) = 0$, já que $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$.

iii) $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = 0$

Portanto, em $x = \pi$ $f(x)$ é contínua.

– em $x = \frac{3\pi}{2}$

i) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\left[3\pi - 2\right]$

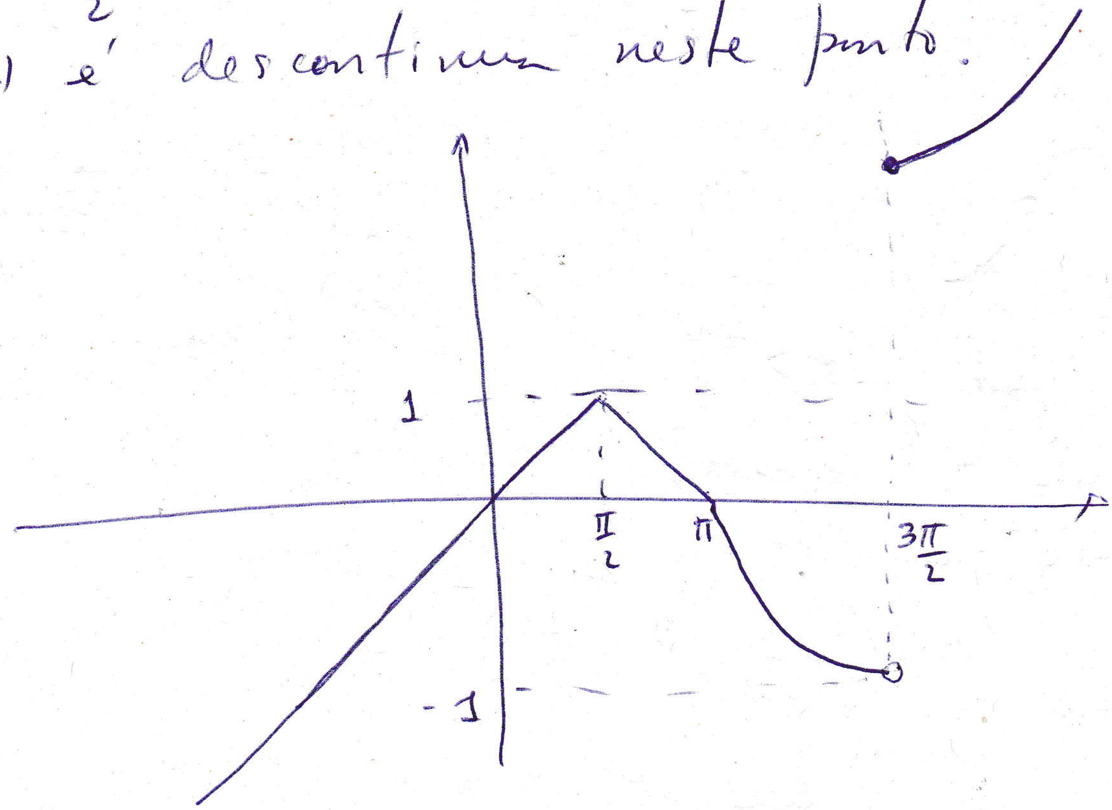
ii) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} (x^2 - x) = \frac{3\pi}{4}\left[3\pi - 2\right]$

logo $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} f(x)$ não existe, já que

$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x)$ e consequentemente

$f(x)$ é descontínua neste ponto.



2) $f(x) = \ln\left[\dfrac{e^{3x}+1}{\cos x}\right]^4 = 4\left[\ln(e^{3x}+1) - \ln(\cos x)\right]$ ③

$$\frac{df}{dx} = 4\frac{d}{dx}\left[\ln(e^{3x}+1) - \ln(\cos x)\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{e^{3x}+1}\cdot\frac{d}{dx}(e^{3x}+1) - \frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x)\right]$$

$$= 4\left[\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} - \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x}\right]$$

$$df = \frac{df}{dx}dx = 4\left[\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} + \operatorname{tg} x\right]dx.$$

Q3) Q3 da ~~VS~~ ~~[illegible]~~ V1 1/2008

Q 4) $L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$

$L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ mudança de variavel. $u = \sqrt{1+e^{2x}}$ logo quando

$x \in [0,1] \Rightarrow u \in [\sqrt{2}, \sqrt{1+e^2}]$ e a função

inversa é: $u^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = u^2-1 \Rightarrow$

$2x = \ln(u^2-1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(u^2-1)$. Logo

$$dx = \frac{dx}{du} \cdot du = \frac{1}{2} \frac{1}{u^2-1} \cdot 2u\, du = \frac{u}{u^2-1} du$$

Portanto: $$L = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} u \frac{u}{u^2-1} du$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1\, du + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{du}{u^2-1}$$

$$= u \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{u-1}{u+1}\right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \left[\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\right] + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right]$$

$$= \left(\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\ln \frac{\left|\sqrt{1+e^2}-1\right|}{\left|\sqrt{1+e^2}+1\right|} \frac{\left|\sqrt{2}+1\right|}{\left|\sqrt{2}-1\right|}\right]$$

Q5) Exercício da sala de aula.