	UFF – Universidade Federal Fluminense **Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda** **Disciplina: Cálculo I** **Prof. Gustavo Benitez Alvarez** **Nome do Aluno (letra forma):** ______________________ **Assinatura do Aluno:** ______________________ **Prova Escrita VS Turma V4 01/2007**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com <u>caneta azul</u> ou <u>preta</u>;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- **Resolva todas as questões pois para a nota final serão consideradas as cinco questões com maior pontuação, acumulando então no máximo dez pontos.**

Questão 1: (Valor 2,5) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{tg(x)}{x^2\cot(x)} + \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2 + a, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Como deve ser escolhido o número "a" para que a função seja continua em x=0.

Questão 2: (Valor 2,5) Encontre os extremos relativos e absolutos da função de [redacted] $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)}$ no intervalo $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.

Questão 3: (Valor 2,5) Determine o comprimento da curva Hipocicloide (ou Astroide) dada em forma paramétrica por $x(t) = a\cos^3(t)$, $y(t) = asen^3(t)$, onde $a > 0$

Questão 4: (Valor 2,5) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x) = 1 + \cos(x)$ no intervalo $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ ao redor do eixo OX.

VS - V4

4) $f(x) = 1 + \cos x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x + \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx =$$

$$= \pi x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \,\text{sen}\, x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi(1-0) + \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2}\, d(2x) \right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4} \,\text{sen}(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{4} + 2\pi + \frac{\pi}{4}(\overset{0}{\cancel{\text{sen}\,\pi}} - \text{sen}\, 0)$$

$$= \frac{3\pi^2}{4} + 2\pi$$

---

3) $x(t) = a \cos^3 t$ $\quad y(t) = a\,\text{sen}^3 t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ em total

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t$ e $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{sen}\, t$ elevando ao quadrado obtemos $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t$ e $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \text{sen}^2 t$ somando ambas equações temos a equação da astroide

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{ou} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad \text{ou} \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t\, \text{sen}\, t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3a\, \text{sen}^2 t \cos t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2 \cos^4 t\, \text{sen}^2 t + 9a^2\, \text{sen}^4 t \cos^2 t} =$$

X

$$= \sqrt{9a^2 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t [\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t]} = \sqrt{9a^2 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t} = 3a \operatorname{sen} t \cos t$$

$$L_1 = \int_{t_1}^{t_2} 3a \operatorname{sen} t \cos t \, dt = 3a \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} t \, d(\operatorname{sen} t) =$$

$$= 3a \left. \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right|_{t_1}^{t_2} = \frac{3a}{2} \left. \operatorname{sen}^2 t \right|_{t_1}^{t_2} = \frac{3a}{2} \left[\operatorname{sen}^2 t_2 - \operatorname{sen}^2 t_1 \right]$$

L_1 é gerado $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, L_2 por $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, L_3 por $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e L_4 por $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ como todos são iguais temos que $L = 4L_1$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$ e $t_1 = 0$. Logo

$$L_1 = \frac{3a}{2} \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}^2 0 \right] = \frac{3a}{2} [1 - 0] = \frac{3a}{2}$$

$L = 4L_1 = 6a$.

---

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)}$ em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

- Extremos relativos.
  - condição necessária $y' = 0$

regra da cadeia

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^{-1}\right] = -1 \, (x^2-1)^{-1-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2-1) = -\frac{1}{(x^2-1)^2} \, 2x = 0$$

ou seja, $x = 0$.

  - condição suficiente $y'' \gtrless 0$.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right) = -2\left[\frac{1 \cdot (x^2-1)^2 - x \cdot 2(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}\right]$$

$$= -2\left[\frac{(x^2-1)^2 - 4x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4}\right]$$ que avaliada no ponto $x=0$ temos

(2)

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x=0) = -2\left[\frac{(0-1)^2 - 4\cdot 0\,(0-1)}{(0-1)^4}\right] = -2\left[\frac{1-0}{1}\right] = -2<0$$

Logo neste ponto existe um máximo relativo.

– Extremos absolutos

$$f(x=0) = \frac{1}{(0^2-1)} = -1$$

$$f\left(x=-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2-1\right)} = \frac{1}{\tfrac{1}{4}-1} = \frac{1}{-\tfrac{3}{4}} = -\frac{4}{3} < -1$$

$$f\left(x=\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-1\right)} = \frac{1}{\tfrac{1}{4}-1} = \frac{1}{-\tfrac{3}{4}} = -\frac{4}{3} < -1$$

Portanto, a função possui em $x=0$ um máximo relativo e absoluto e nos pontos $x=-\frac{1}{2}$ e $x=\frac{1}{2}$ um mínimo absoluto.

---

1) Condições para a função contínua

i $f(x=0)=2$ tá definida

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{tg(x)}{x^2\,ctg(x)} + \dfrac{x^3-x}{x^2+x}\right] = L_1 + L_2$ se existirem os limites.

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x^2\,ctg\,x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{sen\,x}{cos\,x}\cdot\frac{1}{x^2\,\frac{cos\,x}{sen\,x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos^2 x} = 1^2\cdot 1 = 1$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-x}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\,(x^2-1)}{x\,(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+1} = -1$$

Logo $L = L_1 + L_2 = 1 - 1 = 0$

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(x=0)$

$L = 0 = 2 + a$, ou seja , $a = -2$ para que a função seja contínua.
