UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ____________________
Assinatura do Aluno: ____________________
Prova Escrita VS Turma V4 02/2015

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**
- ***Seja o mais explicito possível para responder as questões;***

Questão 1: (Valor 2,0) Determine, se possível, o seguinte limite: $\lim_{x\to 0}\left[tg(x)\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]$.

Questão 2: (Valor 2,0) Analise a continuidade da seguinte função no ponto $x=2$:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}, & \text{se } x\neq 2 \text{ e } x\in[\frac{3}{2},\frac{5}{2}] \\ 1, & \text{se } x=2\end{cases}.$$

Questão 3: (Valor 2,0) A função $f(x)=\left[\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right]^2$ no intervalo $x\in$ [-1,1] possui um extremo relativo. Encontre o extremo relativo e determine também os extremos absolutos neste intervalo.

Questão 4: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x)=x\ln(x)$. Isto é, calcule $\int x\ln(x)\,dx$.

Questão 5: (Valor 2,0) Calcule o volume do corpo de revolução gerado pela rotação da curva $f(x)=1+sen(x)$ no intervalo $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ao redor do eixo OX.

Fórmulas: $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$; $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; $V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$;

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0$; $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\quad a\neq 0$;

$\int\frac{dx}{\cos(x)}=\ln|\sec(x)+tg(x)|+C$; $\frac{1}{\cos(x)}=\sec(x)$; $A_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

Q1) Semelhante Q1 VR TV4 02/2015

Q2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

i) $f(x=2) = 1$

ii) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{(x^3-6x^2+11x-6)'}{(x^2-5x+6)'}$ se L'Hôpital fosse valida!

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2-12x+11}{2x-5} = \dfrac{3\cdot 2^2-12\cdot 2+11}{2\cdot 2-5} = \dfrac{-12+11}{-1}$

$= -\dfrac{1}{-1} = 1.$

iii) $f(x=2) = \lim_{x \to 2} f(x)$, logo $f(x)$ é contínua em $x=2$.

Q3) Semelhante Q3 VR TV4 02/2015

Q4) $\int x \ln(x)\, dx$ $\quad \int u\,dv = uv - \int v\, du.$

$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx.$

$dv = x\, dx \rightarrow v = \int dv = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

$\int x \ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\left[\ln(x) - \frac{1}{2}\right] + C$$

Q5) $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \qquad f(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$

$[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \operatorname{sen}(x)]^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)]\,dx$$

sabendo que $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$

$$V_x = \pi \left\{ x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[-\cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(2x)]\,dx \right\}$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 2\left[\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{0} - \cancel{\cos(0)}^{1}\right] + \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2}\,d(2x) \right.\right.$$

$$= \pi \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]\right\}$$

3

$$V_x = \pi \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{\operatorname{sen}\left(2\tfrac{\pi}{2}\right)} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}(2 0)} \right) \right] \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \right\} = \pi \left\{ \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{2} + 2 \right\}$$

$$= \pi \left[\frac{3\pi}{4} + 2 \right]$$