V. ificação Suplementar Calculo I 01/2006

P f. Gustavo Benitez Alvarez.

Favor responder com clareza e limpeza. Todas as respostas deverão ser justificadas.

1) Analise a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+|x|)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ c, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

2) Determine o diferencial de primeira ordem da função:

$$f(x) = \operatorname{sen}(e^{3x}) + \frac{\ln(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

3) Encontre os extremos relativos e absolutos da função $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ no intervalo $x \in [-1, 1]$.

4) Encontre as primitivas da função:

$f(x) = e^x \operatorname{sen} x + \ln(1+x) + \sqrt{1-(x+1)^2}$. Ou seja,

$$\int \left[e^x \operatorname{sen} x + \ln(1+x) + \sqrt{1-(x+1)^2} \right] dx.$$

5) Calcule o comprimento da curva $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

Obs: Uma função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 se a um incremento infinitesimo do argumento da função $f(x)$, corresponde um incremento infinitesimo da função. Isto é,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0, \quad \text{onde} \quad \Delta x = x - x_0 \quad \text{e} \quad \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Todas as questões valem 2 pontos.

Verificação Suplementar. Cálculo I

Prof. Gustavo Benítez Alvarez.

---

1) Para $x \neq 0$ a função é contínua, já que:

se $x > 0$ $\quad \Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = \frac{\ln(1+|x|)}{x} - \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0}$

$$\Delta y = \frac{\ln(1+|x_0+\Delta x|)}{\Delta x} - \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\ln(1+|x_0+\Delta x|)}{(x_0+\Delta x)} - \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+|x_0+\Delta x|)}{(x_0+\Delta x)} - \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0}$$

como $x_0 > 0$ quando $\Delta x \to 0$ o limite existe sem indeterminação $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+|x_0+\Delta x|)}{(x_0+\Delta x)} = \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0}$

Logo $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0} - \frac{\ln(1+|x_0|)}{x_0} = 0$. Portanto, a função é contínua para $x_0 > 0$.

O mesmo procedimento pode ser feito para $x<0$, chegando-se a conclussão que $f(x)$ é contínua para $x_0 < 0$.

Falta analizar o ponto $x=0$. Neste ponto temos:

Por serie de Taylor ou limite fundamental.

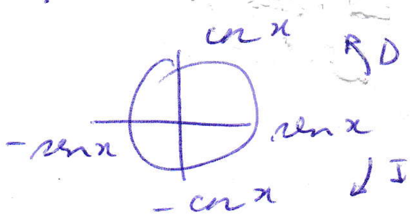
$f(x=0) = C$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+|x|)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1+|x|)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-}\left(-\frac{x}{x}\right) = -1$$

Logo para qualquer valor de "C" a função apresenta uma descontinuidade essencial de primeira especie em $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \underbrace{\operatorname{sen}(e^{3x})}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{\ln(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{f_2(x)}$, $a \in \mathbb{R}$.



$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} \quad \text{e} \quad df = \frac{df}{dx}\,dx$$

$$\frac{df_1}{dx} = \cos(e^{3x})\frac{d(e^{3x})}{dx} = \cos(e^{3x})\, e^{3x}\cdot 3 = 3e^{3x}\cos(e^{3x})$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{(\ln(a^2+x^2))'\sqrt{a^2+x^2} - \ln(a^2+x^2)\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)'}{a^2+x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2+x^2}\,2x\sqrt{a^2+x^2} - \ln(a^2+x^2)\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,2x}{a^2+x^2} =$$

$$= \frac{\frac{2x(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)} - x\ln(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2x - x\ln(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x(2-\ln(a^2+x^2))}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ Logo.

$$df = \left[3e^{3x}\cos(e^{3x}) + \frac{x(2-\ln(a^2+x^2))}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]dx.$$

---

3) $f(x) = \frac{2}{(1+x^2)}$ em $x \in [-1, 1]$

- Extremos relativos: condição necessária, $\frac{df}{dx} = 0$.

$$\frac{df}{dx} = -2\frac{1}{(1+x^2)^2}\,2x = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \text{ou} \quad -4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

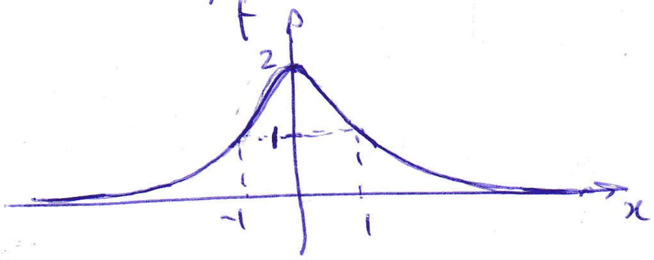
- Extremos relativos: condição suficiente, $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = -4\left\{\frac{(x)'(1+x^2)^2 - x\left[(1+x^2)^2\right]'}{(1+x^2)^4}\right\} =$$

$$= -4\left\{\frac{(1+x^2)^2 - x\,2(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4}\right\} = -\frac{4}{(1+x^2)^3}\left\{(1+x^2) - 4x^2\right\}$$

$$= -\frac{4}{(1+x^2)^3}\left[1-3x^2\right],$$ que avaliada no ponto $x=0$ temos:

$\frac{d^2 f}{dx^2}(x=0) = -4 < 0$. Logo neste ponto a função apresenta um máximo relativo.



$f(x=0) = 2$

- Extremos absolutos: em $x \in [-1, 1]$.

$f(x=-1) = \frac{2}{1+1} = 1$

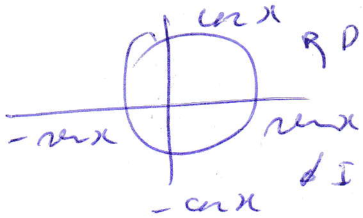
$f(x=1) = \frac{2}{1+1} = 1$

$f(x=0) = 2$

Comparando temos que o máximo absoluto da função é alcanzado no ponto $x=0$ e o mínimo absoluto nos pontos $x=-1$ e $x=1$.

---

4) $$\int\Big[\underbrace{e^x \operatorname{sen} x}_{f_1} + \underbrace{\ln(1+x)}_{f_2} + \underbrace{\sqrt{1-(x+1)^2}}_{f_3}\Big]dx$$



$$\int[f_1+f_2+f_3]\,dx = \int f_1\,dx + \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

$$\int f_1(x)\,dx = \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} =$$

$$= -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$ ou

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$ ou

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C_1$$

$\int f_2(x)\,dx = \int \ln(1+x)\,dx$ fazendo $\cancel{z} = 1+x \Rightarrow d\cancel{z} = dx$

$= \int \underbrace{\ln \cancel{z}}_{u}\, \underbrace{d\cancel{z}}_{dv} = z\ln z - \int z \frac{1}{z}\,dz =$

$= z\ln z - \int dz = z\ln z - z + C_2 =$

$= z(\ln z - 1) + C_2 = (1+x)[\ln(1+x) - 1] + C_2.$

$\int f_3(x)\,dx = \int \sqrt{1-(x+1)^2}\,dx$ fazendo $z = 1+x \Rightarrow dz = dx$

$= \int \sqrt{1-z^2}\,dz$ fazendo $z = 1 \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow dz = \cos t\,dt.$

$= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$

como $\cos^2 t = \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)]$ segue:

$= \int \frac{1}{2}[1+\cos(2t)]\,dt = \frac{1}{2}t + \int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,d(2t) =$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C_3$ como $t = \operatorname{arcsen} z = \operatorname{arcsen}(1+x)$ temos

$= \frac{1}{2}[\operatorname{arcsen}(1+x) + \operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(1+x))] + C_3.$

$= \frac{1}{2}[\operatorname{arcsen}(1+x) + 2(1+x)\cos(\operatorname{arcsen}(1+x))] + C_3.$ Logo,

$\int f(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + (1+x)[\ln(1+x) - 1] +$

$+ \frac{1}{2}[\operatorname{arcsen}(1+x) + 2(1+x)\cos(\operatorname{arcsen}(1+x))] + C.$

5) Verificação de reposição 4).