UFF – Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia Industrial e Metalúrgica de Volta Redonda
Disciplina: Cálculo I
Prof. Gustavo Benitez Alvarez
Nome do Aluno (letra forma): ____________________
Assinatura do Aluno: ____________________

**Prova Escrita VS 02/2006**

Observações:

- **Desligue os aparelhos celulares;**
- **Não rasure esta folha, pois cálculos realizados nesta, não serão considerados. Use a folha de Respostas;**
- **Não existem dúvidas a serem esclarecidas. A interpretação de cada questão faz parte da Avaliação;**
- **Provas respondidas à lápis não terão direito a recorreção. Logo, faça a prova com caneta azul ou preta;**
- **Não é permitido compartilhar materiais didáticos;**
- **É permitido o uso de calculadoras científicas;**

**Questão 1**: (Valor 2,0) Seja $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{ax+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x<0\\ e^{\frac{1}{3}}, & \text{se x} = 0\\ (1+x)^{\frac{bx+1}{3x}}, & \text{se x} > 0\end{cases}$. Como devem ser escolhidos os números "a" e "b" para que a função seja continua em x=0. Considere que a>3.

**Questão 2**: (Valor 2,0) Determine o diferencial de primeira ordem da função $f(x)=x^x+\dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$.

**Questão 3**: (Valor 2,0) Encontre os extremos relativos da função $f(x)=\dfrac{ax}{(b+x)^2}$, onde "a" e "b" são duas constantes diferentes de zero.

**Questão 4**: (Valor 2,0) Encontre as primitivas da função $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}$. Isto é, calcule $\displaystyle\int\frac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}dx$?

**Questão 5**: (Valor 2,0) Determine o comprimento da curva $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$.

Verificação Suplementar Cálculo I 02/2006 (1)

Resposta: Gustavo Benitez Alvarez.

(1) Seja $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{ax+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x<0 \\ e^{\frac{1}{3}} & \text{se } x=0 \\ (1+x)^{\frac{bx+1}{3x}}, & \text{se } x>0 \end{cases}$. Como deve ser escolhidos os números "a" e "b" para que a função seja contínua em $x=0$. Considere que $a>3$.

$$\frac{ax+2}{3x+2}+1-1 = 1+\frac{ax+2-3x-2}{3x+2} = 1+\frac{x(a-3)}{3x+2}$$

fazendo $z = \frac{(a-3)x}{3x+2} \Rightarrow x = \frac{-2z}{3z-(a-3)}$

$z \to 0^-$ se $a>3$ quando $x \to 0^-$

$z \to 0^+$ se $a<3$ quando $x \to 0^-$

Sai este analise.

$$L^- = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left[1+\frac{(a-3)x}{3x+2}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{z\to 0^\pm}(1+z)^{-\frac{3z-(a-3)}{2z}}$$

$$= \lim_{z\to 0^\pm}(1+z)^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{\frac{(a-3)}{2z}} = \lim_{z\to 0^\pm}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\cdot\lim_{z\to 0^\pm}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\left(\frac{a-3}{2}\right)} =$$

$$= e^{\left(\frac{a-3}{2}\right)}.$$

$$L^+ = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{bx+1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{b}{3}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

O limite existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$f(x=0) = e^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 0} f(x) = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{a-3}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}+3 = \frac{11}{3}$$

b pode ser qualquer número real.

(2) Determine o diferencial de primeira ordem da função: $f(x) = \underbrace{x^x}_{y_1} + \underbrace{\frac{\ln x^2}{\sqrt{x}}}_{y_2}$

$$[\ln y_1]' = [\ln x^x]' = [x \ln x]'$$

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = (x)' \ln x + x (\ln x)'$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1\left[\ln x + \frac{x}{x}\right] = x^x[1 + \ln x] = x^x[\ln(x) + 1]$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{(\ln x^2)'\sqrt{x} - \ln x^2 \, \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{2\frac{1}{x}x - \ln x^2 (\frac{1}{2})}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$d f(x) = \left[x^x(\ln x + 1) + \frac{2 - \ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right] dx.$$

---

(3) Encontre os extremos relativos ~~e absolutos~~ da função $f(x) = \frac{a}{(b+x)^2}$ no intervalo $x \in [\quad]$, onde "a" e "b" são constantes.

$$f'(x) = \frac{(a)'(b+x)^2 - a[(b+x)^2]'}{(b+x)^4} = -\frac{a\,2(b+x)}{(b+x)^4} = 0$$

$$b + x = 0 \Rightarrow x = -b$$

a

$$f''(x) = -\frac{a\,2(b+x)}{(b+x)^4}$$

Encontre os extremos relativos da função

$f(x) = \dfrac{ax}{(b+x)^2}$, onde "a" e "b" são duas constantes diferentes de zero.

$$f'(x) = \frac{(ax)'(b+x)^2 - ax\left[(b+x)^2\right]'}{(b+x)^4} = \frac{a(b+x)^2 - 2ax(b+x)}{(b+x)^4}$$

$$= \frac{a(b+x) - 2ax}{(b+x)^3} = 0 \Rightarrow \quad a(b+x) = 2ax$$

$$ab + ax = 2ax \Rightarrow ab = ax$$

$$x = b$$

$$f''(x) = \left[\frac{ab + ax - 2ax}{(b+x)^3}\right]' = \left(\frac{ab - ax}{(b+x)^3}\right]' = \left(\frac{a(b-x)}{(b+x)^3}\right]'$$

$$= a\left[\frac{(b-x)'(b+x)^3 - (b-x)\left(\left[(b+x)^3\right]'\right.}{(b+x)^6}\right] =$$

$$= a\frac{\left[-(b+x)^3 - 3(b-x)(b+x)^2\right]}{(b+x)^6} = a\frac{\left[-(b+x) - 3(b-x)\right]}{(b+x)^4} =$$

$$= \frac{a\left[-b - \cancel{x} - 3b + \cancel{x}\right]}{(b+x)^4} = -\frac{a4b}{(b+x)^4}.$$

$$f''(x=b) = -\frac{4ab}{(2b)^4} = -\frac{4a}{16b^3} = -\frac{a}{4b^3} = \begin{cases} <0 \text{ se } (a>0 \text{ e } b>0) \text{ ou } (a<0 \text{ e } b<0) \\ >0 \text{ se } (a>0 \text{ e } b<0) \text{ ou } (a<0 \text{ e } b>0) \end{cases}$$

Logo no ponto $x=b$ a função possue um máximo relativo se $(a>0$ e $b>0)$ ou $(a<0$ e $b<0)$ e um mínimo relativo se $(a>0$ e $b<0)$ ou $(a<0$ e $b>0)$

④ Encontre as primitivas da função:

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}$$. Isto é, Calcule $\int \frac{2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}dx$

VR 02/2006

⑤ Calcule o comprimento da curva $x^2+y^2=a^2$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a>0$. VS 01/2006.