MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Trabalho No 3

Resolução da Equação de Helmholtz para o caso bidimensional usando o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos.

Trabalho em Grupo de até 3 Alunos

Cada Grupo deve:

1 - entregar um relatório impresso que responda os problemas deste trabalho.

2 ï apresentar oralmente para uma banca mista (professores e alunos) o desenvolvimento do trabalho.

3 ï participar da banca mista.

A nota final de cada Grupo será a media das notas obtidas por cada Grupo nos três itens anteriores.

Considere as duas equações abaixo:

E1- Equação da onda para um potencial escalar $\varphi(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi = c^2 g(x, y, z, t)$$

E2- Equação da onda para um potencial vetorial $\vec{\mathrm{A}}(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathrm{A}}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{\mathrm{A}} = c^2 \vec{\mathrm{G}}(x, y, z, t)$$

Considere os harmônicos temporais para ambas equações

E1- $\varphi(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left(\varphi(x, y, z)e^{-iwt}\right)$ e $g(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left(g(x, y, z)e^{-iwt}\right)$

E2- $\vec{\mathrm{A}}(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{\mathrm{A}}}(x, y, z)e^{-iwt}\right)$ e $\vec{\mathrm{G}}(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{\mathrm{G}}}(x, y, z)e^{-iwt}\right)$

Substituindo nas respectivas equações obtemos a equação que descreve os harmônicos temporais para cada caso.

O símbolo $\mathrm{Re}(\circ)$ denota a parte real da função. Como resultado obtemos

E1- Harmônico temporal da equação da onda para um potencial escalar

$$\nabla^2 \underline{\varphi} + k^2 \underline{\varphi} = \underline{g}, \qquad \text{onde} \quad k = \frac{w}{c} \ \text{(número de onda)}$$

E2- Harmônico temporal da equação da onda para um potencial vetorial

$$\nabla^2 \underline{\vec{\mathrm{A}}} + k^2 \underline{\vec{\mathrm{A}}} = \underline{\vec{\mathrm{G}}}, \qquad \text{onde} \quad k = \frac{w}{c} \ \text{(número de onda)}$$

Ou seja, uma equação ou um sistema de equações do tipo:

$$\nabla^2 u + k^2 u = g \quad \text{(Equação de Helmholtz escalar)}$$

A equação de Helmholtz é o modelo matemático linear (EDP lineares de segunda ordem) que descreve os harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

Problema 3: Equação de Helmholtz.

Considere a equação de Helmholtz para um domínio bidimensional limitado e definido por um quadrado unitário:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$u = g \quad \text{em} \quad \Gamma$$

A condição de contorno de Dirichlet é tal que a solução exata do problema é uma superposição de três ondas planas

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \cos(k(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)) \quad .$$

Neste trabalho cada grupo deve considerar:

Grupo 1- $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{\pi}{4}$	Grupo 4- $\theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \theta_2 = \frac{5\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$
Grupo 2- $\theta_1 = \frac{\pi}{16},\ \theta_2 = \frac{\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{3\pi}{16}$	Grupo 5- $\theta_1 = \frac{9\pi}{16},\ \theta_2 = \frac{5\pi}{8},\ \theta_3 = \frac{11\pi}{16}$
Grupo 3- $\theta_1 = \frac{\pi}{8},\ \theta_2 = \frac{3\pi}{16},\ \theta_3 = \frac{\pi}{4}$	Grupo 6- $\theta_1 = \frac{5\pi}{8},\ \theta_2 = \frac{11\pi}{16},\ \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Resolva este problema de valor de contorno usando:

P1- o método de diferenças finitas centradas de segunda ordem.

P2- o método de elementos finitos com elementos quadriláteros bi-lineares.

P3- apresente as soluções numéricas obtidas por ambos métodos em forma de gráficos 3D e 2D para as secções *x=0.5* e *y=0.5*. Isto deve ser feito para os seguintes valores do número de onda: *k=1, 20, 40* e *100* e para cada malha usada.

P4- Determine o erro relativo na norma $L^2(\Omega)$ definido da seguinte forma

$$\frac{\left\| u^{exata} - u^{aproximada} \right\|_{L^2(\Omega)}}{\left\| u^{exata} \right\|_{L^2(\Omega)}}, \text{ onde } \| f \|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f^2 d\Omega$$

P5- Liste os códigos computacionais usados para cada método.