O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Universidade Federal Fluminense – UFF/EEIMVR, Brasil

benitez.gustavo@gmail.com

II ENCONTRO DE ENGENHARIA DO SUL FLUMINENSE

AGENDA ACADÊMICA

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

O SEMINÁRIO

- Introdução
- Definição Formal do Problema (Algumas Formulações)
- O Desafio
- Qual a Relevância deste Problema?
- Casos Particulares de Um, Dois e Três Corpos
- Integrais de Movimento
- Comentários Finais

Introdução

O Problema dos Três Corpos? ou
O Problema dos N Corpos?

Jean d'Alembert em um artigo de 1761 ("Opuscules Mathematiques", vol.2, Paris 1761, Quatorzième mémoire. Réflexions sur le problème des trois corps, avec de nouvelles tables de la lune, d'un usage très simple et très facile. pp.329-312, at sec.VI, p.245.) deixa entender que o nome problema dos três corpos tem origem em 1747.

Neste artigo d'Alembert, revisando a história matemática do problema, menciona que Euler tinha dado um método por integrar uma certa equação diferencial em 1740.

Este problema tem sua origem na Mecânica Celeste e consiste em determinar as trajetórias "órbitas" de três corpos submetidos apenas à força gravitacional newtoniana entre eles.

Isaac Newton (motivado por uma visita de Edmond Halley, em agosto de 1684, com a finalidade de perguntar-lhe sobre a lei da atração que varia com o inverso do quadrado da distância) fez a primeira formulação matemática completa do problema dos N corpos em sua obra "*Principia*" (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) publicado em 5 de julho de 1687 pela Royal Society.

DES TROIS CORPS. 245

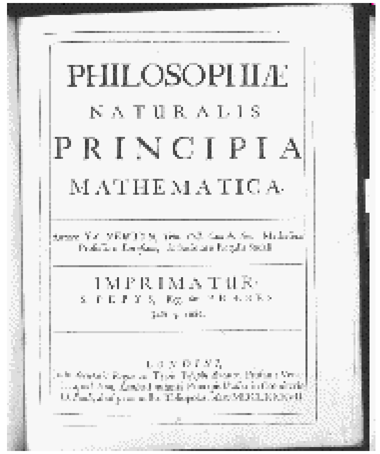
ployées pour parvenir à la même équation.

V. I.

1. A l'égard de l'intégration de cette équation, je ne ſai pourquoi un très-ſavant Mathématicien l'a appellée une *intégration délicate & neuve*; car dès 1740 (ſept ans avant qu'il fût queſtion du Problême des trois Corps), M. Euler avoit donné dans ſa Piéce ſur le *Flux & Reflux de la Mer*, p. 301 & ſuiv. une méthode pour intégrer les équations de cette forme $ddu + Kudz^2 + \Sigma dz^2 = 0$, K étant une conſtante quelconque, & Σ une fonction quelconque de z. Cette méthode, que M. Euler explique aſſez au long, & que j'ai depuis dévelopée & un peu ſimplifiée (ce qui étoit très-facile) dans l'art. 101 de la premiere Edition de mon *Traité de Dynamique*, imprimé en 1743 (quatre ans avant aucune ſolution connue du Problême des trois Corps) eſt analogue à celle dont M. Bernoulli s'eſt ſervi en 1697, pour intégrer les équations de cette forme $du + Kudz + \Sigma dz = 0$. Elle conſiſte à prendre $u =$ au produit de deux indéterminées; on la peut voir miſe en uſage, p. 131 de la ſeconde Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, où elle eſt appliquée à l'intégration même de l'équation différentielle du Problême des trois Corps.

2. La méthode, par laquelle le ſavant Mathématicien déja cité a intégré cette équation, ſe déduit aiſément de cette méthode des indéterminées; qui eſt même plus analytique; car la méthode des indéterminées fait trouver

Introdução



Newton provou em "*Principia*" (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) que um corpo esfericamente simétrico pode ser modelado como uma massa pontual (partícula).

Newton foi o primeiro a expressar as interações gravitacionais entre os corpos celestes em termos de equações diferenciais.

O Problema dos N Corpos consiste em

Introdução

Depois dos trabalhos de Newton os pensadores da época decidiram encarar o Problema dos Três Corpos.

Logo perceberam que o problema não era tão simples e como não conseguiam uma Solução Geral decidiram encontrar Soluções Particulares.

Euler foi o primeiro a considerar o caso particular em que um dos corpos tem massa muito menor que os outros dois ou está muito distante dos outros dois. Com isto, este corpo não influencia o movimento dos outros dois corpos, mas é influenciado por estes.

Lagrange abordou o problema de forma diferente a Euler. Ele imaginou um problema de perturbação, onde um dos corpos produziria uma perturbação do movimento dos outros dois.

Bruns mostrou que neste problema existem 10 integrais de movimento: 3 integrais do Momento Total, 3 integrais para o Centro de Massa, 3 para o Momento Angular Total e 1 para a Energia Total.

Poincaré observou que as trajetórias dos corpos são extremamente sensíveis às condições iniciais, ou seja, uma pequena mudança nas condições iniciais pode causar uma drástica mudança nas posições finais (Caos Determinístico).

Introdução

Alguns Pensadores que contribuíram para a solução deste problema:

Isaac Newton (1642-1727) (Estudos Geométricos)

Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) (Solução aproximada para o Problema Lunar)

Leonhard Euler (1707-1783) (Método para calcular as perturbações nos movimentos planetários)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) (mostrou que o problema poderia ser reduzido de um sistema de equações diferenciais de ordem dezoito para um sistema de ordem sete)

Carl Jacobi (1804-1851) (novos métodos de integração de equações diferenciais)

William Rowan Hamilton (1795-1865) (novos métodos de integração de equações diferenciais)

Charles-Eugène Delaunay (1816-1872) (uso de séries)

George Hill (1838-1914) (soluções periódicas para o problema)

Hugo Gyldén (1841-1896)

Henri Poincaré (1854-1912)

Anders Lindstedt (1854-1939)

Jacques Hadamard (1865-1963) (teoria dos sistemas dinâmicos)

George David Birkhoff (1884-1944) (teoria dos sistemas dinâmicos)

Introdução

O Premio do Rei Oscar II da Suécia a finais do Século XIX para qualquer um que encontrasse uma Solução Geral do Problema dos N Corpos!!!

“Given a system of arbitrarily many mass points that attract each according to Newton's law, under the assumption that no two points ever collide, try to find a representation of the coordinates of each point as a series in a variable that is some known function of time and for all of whose values the series converges uniformly.”

In case the problem could not be solved, any other important contribution to classical mechanics would then be considered to be prize-worthy.

O prêmio foi entregue a Poincaré, mesmo sem ter resolvido o problema original. (A primeira versão de seu trabalho continha sérios erros). A versão final impressa contem muitas idéias importantes para o desenvolvimento da Teoria do Caos. O problema como definido originalmente foi finalmente resolvido por Karl Fritiof Sundman para N = 3.

Em 1912, o matemático finlandês Karl Fritiof Sundman provou que existe uma solução em serie de potencia de ***t1/3*** para o Problema dos 3 Corpos. Esta serie é convergente para todo ***t*** real, exceto para as condições iniciais correspondente a momento angular zero. (Estas condições iniciais tem medida de Lebesgue zero.)

Definição Formal do Problema (Formulações).

- **Dadas três partículas no espaço se movendo sob mútua atração gravitacional e suas condições iniciais, determinar seus movimentos.**

- **O sistema de equações que descreve o problema dos três corpos é composto por nove equações diferenciais de segunda ordem, ou seja, um sistema de ordem dezoito.**

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k^2 m_1 m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{(r_{12})^3} - k^2 m_1 m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{(r_{13})^3}$$

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1,\, j \neq i}^{3} m_j \dfrac{(x_i - x_j)}{(r_{ij})^3} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1,\, j \neq i}^{3} m_j \dfrac{(y_i - y_j)}{(r_{ij})^3} \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1,\, j \neq i}^{3} m_j \dfrac{(z_i - z_j)}{(r_{ij})^3} \end{cases}$$

O Desafio.

- Estudo da Estabilidade do Sistema Dinâmico!

- Estudo do Comportamento Quase Aleatório!

- O Problema dos Três Corpos pode ser integrado por Quadraturas?

  Ou seja, o Problema tem Solução Geral?

  Para Dois Corpos a Solução Geral (Completa) foi obtida por Johann Bernoulli.

  Para Três ou mais Corpos o problema continua sem Solução Geral!

  Apenas existe soluções para casos particulares!

Qual a Relevância deste Problema?

- Interesse prático do Problema dos Três Corpos!

  1- Movimento do Sistema Sol-Terra-Lua.

  2- Movimento de um Planeta ou de um Cometa sob a atração principalmente do Sol e Júpiter.

  3- Movimento de um Satélite Artificial entre a Terra e a Lua.

- Apenas tem aplicação na Mecânica Celeste?

- Já sabemos que existe os chamados Macro-Universo e Micro-Universo! (Macro mundo e Micro mundo)

  4- Átomos de Hidrogeno e Helio, etc. As forças elétricas de Coulomb são semelhantes às gravitacionais (inverso do quadrado da distância).

- Outras

Casos Particulares de Um, Dois e Três Corpos.

- Para o caso particular de um corpo pode ser encontrada uma Solução Geral por Quadraturas.

- Para o caso particular de dois corpos pode ser encontrada uma Solução Geral fazendo uma mudança de variáveis (Coordenadas do Centro de Massa).

$$X_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j x_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}, \qquad Y_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j y_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}, \qquad Z_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j z_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}.$$

- Para o caso particular de três corpos ainda não se tem uma Solução Geral. O problema é resolvido usando Métodos Numéricos ou Aproximados! Outra forma é estudar as propriedades qualitativas do sistema!

Integrais de Movimento.

- Brevemente, as integrais de movimento são as variáveis que permanecem constantes no tempo.

- Bruns mostrou que neste problema existem 10 integrais de movimento:

3 integrais do Momento Total (vetor),
3 integrais para o Centro de Massa (vetor),
3 para o Momento Angular Total (vetor),
1 para a Energia Total (escalar).

Comentários finais

- Faço minhas as Palavras de Filosofo Grego Sócrates!

- Albert Einstein costumava dizer, "*Se o universo (e tudo nele) for um produto de aleatoriedades, ciência seria impossível*." A relação causa-efeito é a base do método científico.

Referências

- Introdução ao Estudo do Problema de N Corpos, Grupo Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, Luis Fernando Osório Melo, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Itajubá

- Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos, Roberta Fonseca dos Prazeres, 2010, Dissertação de Mestrado, PEMAT-UFRJ.

- E muitas outras: MILHARES!!!

MUITO OBRIGADO!

Espero que o tema tenha sido interessante e

que o apresentador tenha feito um bom trabalho.

Pelos menos que tenha satisfeito as expectativas de alguns.

E que de alguma forma tenha compensado parte do esforço

da Comissão Organizadora do evento.

Agradecimentos Especiais

- Ao Prof. Lobão pelo apoio recebido.
- A Coordenação do Evento.
- A todos os presentes.