

# MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS DESCONTÍNUOS PARA O PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Abimael Fernando Dourado Loula<sup>1\*</sup>, Gustavo Benitez Alvarez<sup>1</sup>,  
Eduardo Gomes Dutra do Carmo<sup>2</sup>, Fernando Alves Rochinha<sup>2</sup>

1: LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica  
Ministério de Ciência e Tecnologia  
Av. Getúlio Vargas 333, 25651-070, P.B. 95113, Petrópolis, RJ, Brazil  
e-mail: alocc@lncc.br, benitez@lncc.br

2: COPPE - Coordenação dos Programas de Pós-Graduação  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Ilha do Fundão, 21945-970, P.B. 68509, Rio de Janeiro, RJ, Brazil  
e-mail: carmo@lmn.con.ufrj.br, rochinha@adc.coppe.ufrj.br

**Palavras chave:** Elementos finitos, Galerkin descontínuo, Helmholtz, bolhas descontínuas

**Resumo.** *São apresentados métodos de elementos finitos descontínuos para a equação de Helmholtz em domínios limitados. Inicialmente apresenta-se uma formulação totalmente descontínua onde a continuidade é relaxada na interface dos elementos. A seguir apresenta-se uma formulação descontínua em nível de elemento onde, agora, a continuidade é relaxada no interior dos elementos ou macroelementos. Em ambas formulações são intruduzidos parâmetros de estabilização que jogam um papel decisivo na minimização do erro de poluição decorrente do desvio de fase do problema aproximado. Para a formulação descontínua em nível de elemento são apresentadas expressões explícitas para os valores ótimos destes parâmetros de estabilização. Estabilidade e precisão das formulações apresentadas são confirmadas em exemplos numéricos.*

## 1 INTRODUÇÃO

Modelagem computacional de propagação de ondas é uma área de grande interesse técnico-científico pelas suas inúmeras aplicações e pelo grande desafio que é o desenvolvimento de métodos numéricos robustos e computacionalmente eficientes para esta classe de problemas. Neste contexto, o problema de Helmholtz que descreve a resposta estacionária do som em meios não viscosos, tem sido utilizado como um protótipo para o desenvolvimento de métodos numéricos. Apesar de sua aparente simplicidade, a aproximação numérica deste problema é um grande desafio, como relatado na literatura [1-5]. O problema está

justamente no caráter oscilatório da solução deste problema, que depende do número de ondas  $k$ . É bem sabido que o desempenho do método de Galerkin clássico se deteriora para valores elevados de  $k$ . Este efeito, conhecido como poluição da aproximação, pode ser reduzido somente após um drástico refinamento da malha de elementos finitos, o que torna praticamente inviável a análise numérica deste problema para frequências elevadas[2,5]. Torna-se então necessário o desenvolvimento de métodos numéricos com reduzidos efeitos de poluição[1-12]. Ainda no contexto dos métodos de elementos finitos, o método estabilizado gerado pela adição de resíduos de mínimos quadrados ao método de Galerkin (GLS) apresentado na referência [3] é capaz de eliminar completamente o erro de fase, e consequentemente o efeito de poluição, em problemas unidimensionais. Conforme Babuška, em mais de uma dimensão não existe aproximação por elementos finitos ou diferenças finitas livres de poluição [5]. Ainda conforme Babuška o estêncil de nove pontos, correspondente ao método de elementos finitos quase estabilizado (QS-FEM) apresentado em [5], minimiza o erro de poluição. A rigor, o QS-FEM é de fato um método de diferenças finitas uma vez que não deriva de uma formulação variacional. As modificações no operador discreto são introduzidas algèbricamente.

Neste trabalho, apresentamos formulações de elementos finitos descontínuos para a equação de Helmholtz em domínios limitados. Inicialmente apresentamos uma formulação totalmente descontínua onde a continuidade é relaxada na interface dos elementos. A seguir apresentamos uma formulação descontínua em nível de elemento onde, agora, a continuidade é relaxada no interior dos elementos ou macroelementos. Em ambas formulações são intruduzidos parâmetros de estabilização que jogam um papel decisivo na minimização dos erros de poluição resultantes dos erros de fase do problema aproximado. Para a formulação descontínua em nível de elemento são apresentadas expressões explícitas para os valores ótimos destes parâmetros de estabilização. Em particular, o estêncil ótimo correspondente ao QS-FEM é consistentemente obtidos para uma escolha adequada destes parâmetros de estabilização. Estabilidade e precisão das formulações apresentadas são confirmadas em exemplos numéricos.

## 2 Problema Modelo

Seja  $\Omega \subset R^n$  ( $n = 1, 2$ ) um aberto limitado com contorno Lipschitz contínuo por partes  $\Gamma$ . Seja  $\Gamma_g, \Gamma_q, \Gamma_r$  subconjuntos de  $\Gamma$  tais que:  $\Gamma_g \cap \Gamma_q = \emptyset, \Gamma_g \cap \Gamma_r = \emptyset, \Gamma_q \cap \Gamma_r = \emptyset, \Gamma_g \cup \Gamma_q \cup \Gamma_r = \Gamma$ . Consideramos o seguinte problema de Helmholtz interior

$$-\nabla \cdot \nabla u - k^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1)$$

com condições de contorno:

$$u = g \quad \text{em } \Gamma_g, \quad (2)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = q \quad \text{em } \Gamma_q, \quad (3)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha u = r \quad \text{em } \Gamma_r, \quad (4)$$

onde  $u$  é um campo escalar que representa ondas acústicas harmônicas no tempo. O coeficiente  $k \in \mathbb{R}$  representa o número de ondas,  $f \in L^2(\Omega)$  é o termo de fonte,  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_g) \cap C^0(\Gamma_g)$ ,  $q \in L^2(\Gamma_q)$  e  $r \in L^2(\Gamma_r)$  são as condições de contorno prescritas. O coeficiente  $\alpha \in L^\infty(\Gamma_r)$  é positivo em  $\Gamma_r$  e  $\mathbf{n}$  denota a vetor unitário normal exterior a  $\Gamma$ .

## 2.1 Método de Galerkin Contínuo

Seja  $S_h \subset H^1(\Omega)$  o espaço de elementos finitos lagrangiano de classe  $C^0$  e grau  $l = 1$  e

$$V_h = \{v_h \in S_h; v_h = 0 \text{ em } \Gamma_g\} \quad (5)$$

$$U_h = \{v_h \in S_h; v_h = g_h \text{ em } \Gamma_g\}, \quad (6)$$

onde  $g_h$  denota a interpolante  $g$  em  $S_h$ . O método de elementos finitos contínuo clássico, baseado na formulação de Galerkin, consiste em: Achar  $u_h \in U_h$  tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (7)$$

com

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} [\nabla u_h \cdot \nabla v_h - k^2 u_h v_h] d\Omega + \int_{\Gamma_r} \alpha u_h v_h d\Gamma \quad (8)$$

$$f(v_h) = \int_{\Omega} f v_h d\Omega + \int_{\Gamma_q} q v_h d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \alpha v_h d\Gamma \quad (9)$$

Uma análise refinada desta aproximação, apresentada em [4], conduz à seguinte estimativa de erro, válida para  $kh < 1$ ,

$$e_1 = \frac{|u - u_h|_1}{|u|_1} \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2 \quad (10)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  independentes do número de ondas  $k$  e do tamanho  $h$  do elemento. O termo  $C_1 kh$  está associado ao erro de interpolação, enquanto que o termo  $C_2 k^3 h^2$  é devido ao erro de fase, e foi denominado, por Babuška, *erro de poluição*. Podemos observar que para  $h$  fixo e  $k$  suficientemente grande o erro de poluição  $C_2 k^3 h^2$  supera o erro de interpolação  $C_1 kh$ .

## 2.2 Galerkin Mínimos Quadrados (GLS)

A formulação estabilizada de Galerkin Mínimos Quadrados, apresentada em [4] consiste na seguinte modificação do método de Galerkin definida em  $U_h$  e  $V_h$ :

Achar  $u_h \in U_h$  tal que

$$a_{GLS}(u_h, v_h) = f_{GLS}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (11)$$

com

$$a_{GLS}(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + \tau(\nabla \cdot \nabla u_h + k^2 u_h, \nabla \cdot \nabla v_h + k^2 v_h)_h \quad (12)$$

$$f_{GLS}(v_h) = f(v_h) - \tau(f, \nabla \cdot \nabla v_h + k^2 v_h)_h \quad (13)$$

onde  $(\cdot, \cdot)_h$  denota o produto escalar dependente da malha

$$(u_h, v_h)_h = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega^e} u_h^e v_h^e d\Omega \quad (14)$$

em que  $ne$  é o número total de elementos da malha,  $\Omega^e$  é o domínio do elemento  $e$  e  $u_h^e$  e  $v_h^e$  são as restrições de  $u_h$  e  $v_h$  a  $\Omega^e$ .

O valor ótimo de  $\tau$  é determinado minimizando-se a diferença entre o número de ondas aproximado  $\tilde{k}$  e o exato  $k$ . Em uma dimensão é possível escolher  $\tau$  de modo que  $\tilde{k} = k$ , eliminando-se completamente o erro de fase e conseqüentemente o efeito de poluição na solução aproximada. Em duas dimensões, para malhas uniformes, o valor ótimo de  $\tau$  é determinado eliminando o erro de fase em uma direção  $0 < \theta < \pi/4$ , dada a simetria da malha. Assim procedendo, obtemos  $\theta = \pi/8$  e

$$\tau = \frac{1}{k^2} \left( 1 - 6 \frac{4 - \cos \xi_1 - \cos \xi_2 - 2 \cos \xi_1 \cos \xi_2}{(2 + \cos \xi_1)(2 + \cos \xi_2)k^2 h^2} \right) \quad (15)$$

com

$$\xi_1 = kh \cos \theta \quad \xi_2 = kh \sin \theta. \quad (16)$$

Em comparação com o método de Galerkin, esta formulação estabilizada consegue reduzir significativamente o erro de poluição em determinadas direções mas, em geral, apresenta erro de poluição de mesma ordem que o método de Galerkin.

### 2.3 Métodos de elementos finitos quase estabilizados

O método de elementos finitos quase estabilizado (QS-FEM) apresentado na referência [5] desenvolve uma estratégia de estabilização baseada no estêncil geral de 9 pontos típico de aproximações por elementos finitos bilineares em malhas uniformes

$$\begin{aligned} &A_2 u_{i-1,j-1} + A_1 u_{i,j-1} + A_2 u_{i+1,j-1} + \\ &A_1 u_{i-1,j} + A_0 u_{i,j} + A_1 u_{i+1,j} + \\ &A_2 u_{i-1,j+1} + A_1 u_{i,j+1} + A_2 u_{i+1,j+1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Esta forma geral é comum a todos os métodos de elementos finitos bilineares, ou de diferenças finitas de segunda ordem, com malhas uniformes. Por exemplo, para o método de Galerkin os coeficientes  $A_i$  apresentam as seguintes expressões

$$A_0 = \frac{8}{3} - \alpha, \quad A_1 = -\frac{1}{3} - \alpha, \quad A_2 = -\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \quad (18)$$

com  $\alpha = (kh)^2/9$ . Já no método GLS estes coeficientes apresentam as mesmas expressões do método de Galerkin apenas substituindo-se  $\alpha$  por  $\alpha_{GLS} = \alpha(1 - \tau k^2)$ , onde  $\tau$  é o parâmetro de estabilização.

Admitindo uma solução na forma de uma onda plana em uma direção  $\theta$ :

$$u_{i,j} = u_h(x_i, y_j) = e^{i\tilde{k}(x_i \cos \theta + y_j \sin \theta)} \quad (19)$$

obtemos a seguinte relação de dispersão

$$A_0 + 2A_1(\cos \xi_1 + \cos \xi_2) + 4A_2 \cos \xi_1 \cos \xi_2 = 0 \quad (20)$$

com

$$\xi_1 = \tilde{k}h \cos \theta \quad \xi_2 = \tilde{k}h \sin \theta. \quad (21)$$

Determinam-se, então, os coeficientes  $A_i$  de modo a minimizar o erro de poluição. Isto equivale a eliminar o erro de dispersão em duas direções  $\theta_1 = \pi/16$  e  $\theta_2 = 3\pi/16$ , resultando

$$A_0 = 4 \quad (\text{normalizado}) \quad (22)$$

$$A_1 = 2 \frac{c_1 s_1 - c_2 s_2}{c_2 s_2 (c_1 + s_1) - c_1 s_1 (c_2 + s_2)} \quad (23)$$

$$A_2 = \frac{c_2 + s_2 - c_1 - s_1}{c_2 s_2 (c_1 + s_1) - c_1 s_1 (c_2 + s_2)} \quad (24)$$

com

$$c_1 = \cos(kh \cos \theta_1); \quad s_1 = \cos(kh \sin \theta_1) \quad (25)$$

$$c_2 = \cos(kh \cos \theta_2); \quad s_2 = \cos(kh \sin \theta_2). \quad (26)$$

Como se pode observar o QS-FEM é de fato um método de diferenças finitas e não de elementos finitos, uma vez que não foi derivado a partir de uma formulação variacional. Uma análise numérica deste método, com condições de contorno aproximadas de forma suficientemente precisa, conduz à seguinte estimativa de erro [5]

$$e_1 = \frac{|u - u_h|_1}{|u|_1} \leq C_1 kh + C_2 k^7 h^6 \quad kh < 1 \quad (27)$$

que, obviamente, ainda apresenta erro de poluição mas de ordem  $k^7 h^6$ , bem mais elevada do que as correspondetes aos métodos de Galerkin e GLS  $k^3 h^2$ .

### 3 Métodos de elementos finitos totalmente descontínuos

Definindo os espaços de elementos finitos descontínuos

$$S_{DG}^{h,l} = \{v_h \in L^2(\Omega) \quad v_h^E = v_h|_{\Omega_E} \in P^l(\Omega_E)\} \quad (28)$$

$$U_{DG}^{h,l} = \{v_h \in S_{DG}^{h,l} \quad v_h = g^h \text{ on } \Gamma_g\} \quad (29)$$

$$V_{DG}^{h,l} = \{v_h \in S_{DG}^{h,l} \quad v_h = 0 \text{ on } \Gamma_g\}, \quad (30)$$

onde  $P^l(\Omega_E)$  é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a  $l$  definidos em cada elemento  $\Omega_E$ , introduzimos a seguinte aproximação por elementos finitos para o problema de Helmholtz:

Achar  $u_h \in S_{DG}^{h,l}$  tal que

$$a_G(u_h, v_h) + a_{DG}(u_h, v_h) = f_G(v_h) \quad \forall v_h \in V_{DG}^{h,l} \quad (31)$$

onde

$$a_G(u_h, v_h) = \sum_{E=1}^{NE} \left[ \int_{\Omega_E} [\nabla u_h^E \cdot \nabla v_h^E - k^2 u_h^E v_h^E] d\Omega + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_E} \alpha u_h^E v_h^E d\Gamma \right], \quad (32)$$

$$f_G(v_h) = \sum_{E=1}^{NE} \left[ \int_{\Omega_E} f v_h^E d\Omega + \int_{\Gamma_q \cap \Gamma_E} q v_h^E d\Gamma + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_E} r v_h^E d\Gamma \right] \quad (33)$$

$$\begin{aligned} a_{DG}(u_h, v_h) &= \sum_{E=1}^{NE} \sum_{E' \succ E}^{NE} \int_{\Gamma_{EE'}} \frac{\beta^{EE'}}{h_{EE'}} (u_h^E - u_h^{E'}) (v_h^E - v_h^{E'}) d\Gamma \\ &+ \sum_{E=1}^{NE} \sum_{E' \succ E}^{NE} \int_{\Gamma_{EE'}} \frac{\lambda^{EE'}}{2} (u_h^E - u_h^{E'}) (\nabla v_h^E \cdot \mathbf{n}_E - \nabla v_h^{E'} \cdot \mathbf{n}_{E'}) d\Gamma \\ &- \sum_{E=1}^{NE} \sum_{E' \succ E}^{NE} \int_{\Gamma_{EE'}} \frac{1}{2} (\nabla u_h^E \cdot \mathbf{n}_E - \nabla u_h^{E'} \cdot \mathbf{n}_{E'}) (v_h^E - v_h^{E'}) d\Gamma \end{aligned} \quad (34)$$

onde  $NE$  é o número total de elementos da malha.

Esta formulação de elementos finitos descontínuos consiste em uma família de métodos parametrizados pelo par  $\beta^{EE'}$ ,  $\lambda^{EE'}$ . Podemos observar que todas as escolhas destes parâmetros, exceto  $\lambda = -1$ , conduzem a formulações não simétricas. Para problemas fortemente elípticos, valores ótimos destes parâmetros são determinados *a priori* via análise numérica em [13]. Para a equação de Helmholtz valores ótimos destes parâmetros  $\beta^{EE'}$ ,  $\lambda^{EE'}$  foram determinados através de experimentos numéricos em [14].

#### 4 Métodos de elementos descontínuos em nível de elemento

Consideramos a partição usual

$$\bar{\Omega}^h = \bigcup_{E=1}^{NE} \bar{\Omega}_E = \bigcup_{E=1}^{NE} (\Omega_E \cup \Gamma_E) \quad (35)$$

do domínio  $\bar{\Omega}$  em macro-elementos  $\bar{\Omega}_E$ , onde cada macro-elemento, por sua vez, é particionado em elementos que definem sub-malhas

$$\bar{\Omega}_E = \bigcup_{e=1}^{ne} (\Omega_E^e \cup \Gamma_E^e) \quad (36)$$

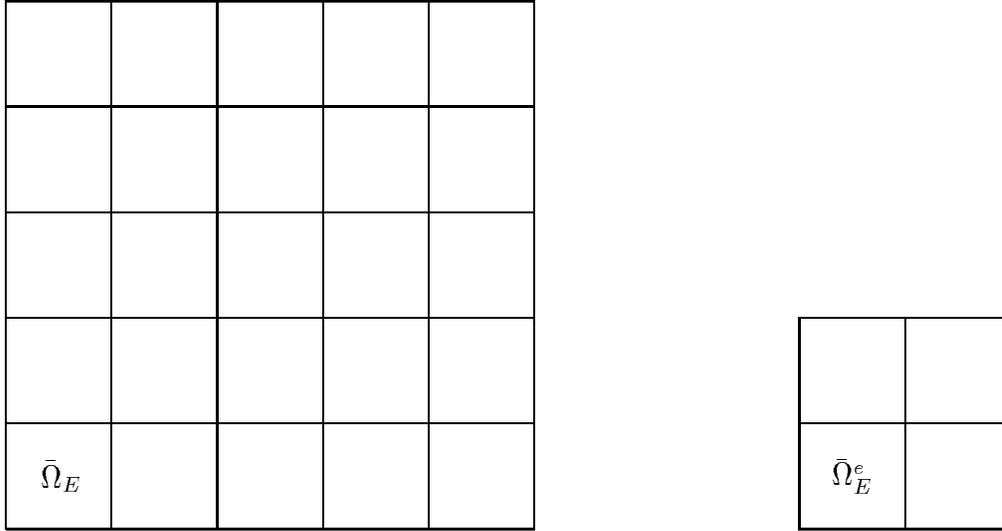


Figura 1: Discretização de  $\bar{\Omega}$  em macro-elementos  $\bar{\Omega}_E$  e de  $\bar{\Omega}_E$  em quatro elementos  $\bar{\Omega}_E^e$

onde  $\Gamma_E$  denota o contorno de  $\Omega_E$  e  $\Gamma_E^e$  denota o contorno de  $\Omega_E^e$ . Em outras palavras,  $\bar{\Omega}^h$  é a união de  $NE$  macro-elementos  $\bar{\Omega}_E$  gerados pela união de  $ne$  elementos  $\bar{\Omega}_E^e$ . Por simplicidade, restringimos a nossa apresentação a elementos bilineares, e consideramos apenas macro-elementos formados por quatro elementos como ilustrado na Figura 1. Seja  $S_h^a \subset H^1(\Omega)$  o espaço de elementos finitos lagrangiano clássico de classe  $C^0$  e grau  $l = 1$  com as funções de interpolação locais definidas sobre macro-elementos  $\Omega_E$  e  $V_h^b \subset L^2(\Omega)$  o espaço de polinômios bilineares por partes  $v_h^b$  definidos em cada macro-elemento satisfazendo  $v_{h,b} = 0$  em  $\Gamma_E$ . Estas funções de interpolação polinomiais por partes serão referidas como *bolhas descontínuas*. Definindo

$$V_h = V_h^a + V_h^b \quad (37)$$

$$U_h = U_h^a + V_h^b \quad (38)$$

$$V_h^a = \{v_h \in S_h^a; v_h = 0 \text{ em } \Gamma_g\} \quad (39)$$

$$U_h^a = \{v_h \in S_h^a; v_h = g_h \text{ em } \Gamma_g\}, \quad (40)$$

onde  $g_h$  é a interpolante de  $g$  em  $S_h^a$ , apresentamos a seguinte formulação de elementos finitos descontínuos em nível de elemento:

Achar  $u_h = u_{h,a} + u_{h,b} \in U_h = U_h^a + V_h^b$  tal que

$$a(u_{h,a}, v_{h,a}) + a(u_{h,b}, v_{h,a}) = f(v_{h,a}) \quad \forall v_{h,a} \in V_h^a \quad (41)$$

$$a(u_{h,a}, v_{h,b}) + a(u_{h,b}, v_{h,b}) = f(v_{h,b}) \quad \forall v_{h,b} \in V_h^b \quad (42)$$

onde

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Gamma_r} \alpha u_{h,a} v_{h,a} d\Gamma + \sum_{E=1}^{NE} a_E(u_h^E, v_h^E) \quad (43)$$

$$f(v_h) = \int_{\Gamma_q} q v_{h,a} d\Gamma + \int_{\Gamma_r} r v_{h,a} d\Gamma + \sum_{E=1}^{NE} f_E(v_h^E) \quad (44)$$

com

$$\begin{aligned} a_E(u_h^E, v_h^E) &= \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_E^e} [\nabla u_h^{E,e} \cdot \nabla v_h^{E,e} - k^2 u_h^{E,e} v_h^{E,e}] d\Omega \\ &- \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \sum_{e' > e}^{ne} \int_{\Gamma_E^{e,e'}} [\nabla u_h^{E,e} + \nabla u_h^{E,e'}] \cdot \mathbf{n}_E^e [v_h^{E,e} - v_h^{E,e'}] d\Gamma \\ &+ \sum_{e=1}^{ne} \sum_{e' > e}^{ne} \int_{\Gamma_E^{e,e'}} [u_h^{E,e} - u_h^{E,e'}] \frac{\beta_E^{e,e'}}{h^{e,e'}} [v_h^{E,e} - v_h^{E,e'}] d\Gamma \\ &+ \sum_{e=1}^{ne} \sum_{e' > e}^{ne} \int_{\Gamma_E^{e,e'}} [u_h^{E,e} - u_h^{E,e'}] \frac{\lambda_E^{e,e'}}{2} [\nabla v_h^{E,e} + \nabla v_h^{E,e'}] \cdot \mathbf{n}_E^e d\Gamma \end{aligned} \quad (45)$$

$$f_E(v_h^E) = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_E^e} f_E^e v_h^{E,e} d\Omega, \quad (46)$$

em que  $\Gamma_E^{e,e'} = \Gamma_E^e \cap \Gamma_E^{e'}$ ,  $h^{e,e'} = \min\{h_E^e, h_E^{e'}\}$  onde  $h_E^e$  e  $h_E^{e'}$  são parâmetros da submalha e  $\beta_E^{e,e'}$  e  $\lambda_E^{e,e'}$  são dois conjuntos de parâmetros livres que serão determinados minimizando-se o erro de poluição.

Devemos observar que  $S_h^a + V_h^b$  consiste no espaço de elementos finitos lagrangiano clássico,  $S_h^a$ , de classe  $C^0$ , enriquecido com funções bolhas descontínuas em cada macro-elemento. É interessante notar que estas bolhas não precisam ser funções polinomiais de alta ordem, justamente por serem descontínuas. Aqui nós consideramos, por simplicidade, polinômios bilineares tanto em  $S_h^a$  como em  $V_h^b$  (espaço das bolhas descontínuas)

#### 4.1 Condensação

A formulação de elementos finitos descontínuos dá origem ao seguinte sistema de equações algébricas

$$AU_a + B(\tilde{\lambda})U_b = F_a \quad (47)$$

$$CU_a + D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})U_b = F_b \quad (48)$$

onde  $A, B(\tilde{\lambda}), C$  e  $D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})$  são matrizes globais,  $F_a$  e  $F_b$  são vetores globais resultantes da discretização,  $U_a$  é o vetor das incógnitas globais associadas à interpolação no espaço lagrangiano usual  $U_h^a$ , enquanto que  $U_b$  é o vetor das incógnitas locais associadas à interpolação no espaço  $V_h^b$  das bolhas descontínuas,  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\beta}$  são os conjuntos de parâmetros livres:

$$\tilde{\lambda} = \{\lambda_E^{e,e'} \mid e, e' = 1, 2, \dots, ne; E = 1, 2, \dots, NE\} \quad (49)$$

$$\tilde{\beta} = \{\beta_E^{e,e'} \ e, e' = 1, 2, \dots, ne; \ E = 1, 2, \dots, NE\} \quad (50)$$

introduzidos na presente formulação para reforçar a imposição de continuidade no sentido variacional na interface  $\Gamma_E^{e,e'}$  dos  $\Omega_E^e$  e  $\Omega_E^{e'}$  em cada macro-elemento  $\Omega_E$ .

Dados  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\beta}$  a matriz  $D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})$  pode ser fãcilmente invertida por ser bloco diagonal. Assim procedendo, nós eliminamos o vetor  $U_b$  e obtemos a seguinte forma condensada para o sistema global associado ao método de elementos finitos descontínuo em nível de elemento

$$A^*U_a = F^* \quad (51)$$

onde

$$A^* = A - B(\tilde{\lambda})D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})^{-1}C, \quad (52)$$

$$F^* = F_a - B(\tilde{\lambda})D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})^{-1}F_b. \quad (53)$$

Observamos que este sistema condensado é topologicamente equivalente ao obtido com a formulação clássica de Galerkin de classe  $C^0$  na malha de macro-elementos. Observamos ainda que operacionalmente não precisamos montar as matrizes globais  $A$ ,  $B(\tilde{\lambda})$ ,  $C$  e  $D(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})$  uma vez que a condensação pode ser realizada localmente calculado-se para cada macro-elemento a matriz condensada

$$A_E^* = A_E - B_E(\tilde{\lambda})D_E(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})^{-1}C_E, \quad (54)$$

e o vetor de cargas condensado

$$F_E^* = F_{a,E} - B_E(\tilde{\lambda})D_E(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta})^{-1}F_{b,E}. \quad (55)$$

A matriz  $A^*$  e o vetor  $F^*$  globais do sistema condensado são então montados como no método de elementos finitos contínuo. O aspecto crucial da presente formulação é a determinação dos dois conjuntos de parâmetros  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\beta}$ . A seguir obteremos expressões explícitas para estes parâmetros, para uma malha uniforme, minimizando o erro de fase.

## 4.2 Análise de dispersão

Para malhas uniformes admitimos  $\lambda_E^e = \lambda$ ,  $\beta_E^e = \beta$ . Neste caso, as matrizes elementares são dadas explicitamente por

$$A_E = \sum_{i=0}^2 a_i E_i; \quad B_E = \sum_{i=0}^2 b_i(\lambda) E_i; \quad (56)$$

$$C_E = \sum_{i=0}^2 c_i E_i; \quad D_E = \sum_{i=0}^2 d_i(\lambda, \beta) E_i; \quad (57)$$

onde  $E_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) são as seguintes matrizes  $4 \times 4$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Resolvendo o problema de autovalor

$$XV = \omega V; \text{ onde } X = \sum_{i=0}^2 x_i E_i \quad (59)$$

obtemos os autovalores

$$\omega_1 = \frac{x_0 + 2x_1 + x_2}{2}; \quad (60)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{x_0 - x_2}{2}; \quad (61)$$

$$\omega_4 = \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{2}; \quad (62)$$

e a correspondente matriz dos autovetores

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

normalizada de modo que  $MM^T = M^T M = I$ . Usando a expressão

$$A_E^* = \sum_{i=0}^2 a_i^* E_i = A_E - B_E(\lambda) D_E(\lambda, \beta)^{-1} C_E, \quad (64)$$

da matriz elementar condensada, na forma diagonalizada

$$M^T A_E^* M = M^T A_E M - M^T B_E(\lambda) D_E(\lambda, \beta) C_E M, \quad (65)$$

através de uma análise de dispersão obtemos as seguintes expressões para os parâmetros de estabilização  $\lambda$  e  $\beta$  que eliminam o erro de fase em duas direções  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\lambda = -1 + \frac{(g_1 p_3 - p_1 g_3)}{(p_2 g_1 - p_1 g_2)}, \quad (66)$$

$$\beta = 1 + 3 \frac{(g_3 p_2 - p_3 g_2)}{(p_2 g_1 - p_1 g_2)} - \frac{1}{2} \frac{(g_1 p_3 - p_1 g_3)}{(p_2 g_1 - p_1 g_2)}, \quad (67)$$

e para os coeficientes da matriz elementar condensada  $A_E^*$ :

$$a_0^* = - \frac{\left[ \frac{9\alpha_G}{4} + \left( \frac{9\alpha_G}{16} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \right]}{[1 + 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2]}, \quad (68)$$

$$a_1^* = a_0^* \frac{(r_1 - r_2)}{(r_2 w_1 - r_1 w_2)} = a_0^* \bar{a}_1, \quad (69)$$

$$a_2^* = a_0^* \frac{(w_2 - w_1)}{(r_2 w_1 - r_1 w_2)} = a_0^* \bar{a}_2, \quad (70)$$

onde

$$g_1 = -4a_0^*(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) - 2 \left[ 1 + 24Q + \frac{81}{\gamma} Q^2 \right], \quad Q = \frac{\alpha_G}{16}, \quad (71)$$

$$g_2 = \frac{3Q}{2}, \quad g_3 = \gamma \left[ 2a_0^*(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + 1 + 24Q + \frac{81}{\gamma} Q^2 \right] - 9Q^2, \quad (72)$$

$$p_1 = -16a_0^* \bar{a}_1 - 4 \left[ \frac{2}{3} + 32Q + \frac{81}{\gamma} Q^2 \right], \quad (73)$$

$$p_2 = \frac{Q}{3}, \quad p_3 = \gamma \left[ 4a_0^* \bar{a}_1 + \frac{2}{3} + 32Q + \frac{81}{\gamma} Q^2 \right] - Q^2. \quad (74)$$

Dada a simetria da malha, as direções  $\theta_1$  e  $\theta_2$  devem ser escolhidas no intervalo  $(0, \frac{\pi}{4})$  com  $\theta_1 \neq \theta_2$  e  $\theta_2 - \theta_1 \neq \frac{\pi}{4}$  para se evitar um sistema indefinido em  $\beta$  e  $\lambda$ . Observamos que a solução obtida para esta escolha dos parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$  só estará livre de poluição para ondas planas nas direções  $\theta_1$  ou  $\theta_2$ . Em particular, escolhendo  $\theta_1 = \frac{\pi}{16}$  e  $\theta_2 = \frac{3\pi}{16}$  a matriz elementar condensada  $A_E^*$ , assim obtida, conduz a um estêncil idêntico ao correspondente do método quase estabilizado QS-FEM apresentado em [5]. Esta escolha ótima será adotada nos nossos experimentos numéricos.

A relação de dispersão (20) nos permite determinar o erro de fase,  $|k - \tilde{k}|$ , da aproximação de uma onda plana em uma direção qualquer  $\theta$  em função de  $kh$  e  $\theta$ . Na Figura 2 nós comparamos os valores exatos  $kh = 1$  e aproximados  $\tilde{k}h$  correspondentes aos métodos de Galerkin contínuo (GFEM) e Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) para valores de  $\theta$  no intervalo  $[0, \pi/4]$ . A Figura 3 apresenta o mesmo gráfico comparativo para o método de elementos finitos descontínuo em nível de elemento (DB-FEM). Idênticos estudos são apresentados para  $kh = 2$  nas Figuras 4 (para os métodos de Galerkin e GLS) e 5 (para o método de elementos finitos descontínuos).

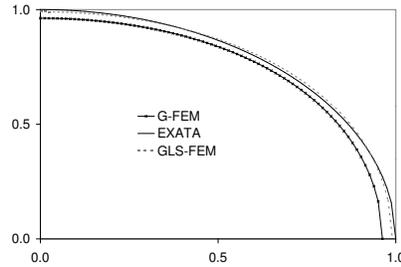


Figura 2: Estudo de dispersão dos métodos de Galerkin(G-FEM) e Galerkin Mínimos Quadrados para  $kh = 1$

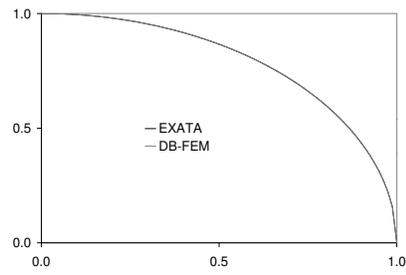


Figura 3: Estudo de dispersão do método de elementos finitos desconínuos em nível de elemento (DB-FEM) para  $kh = 1$

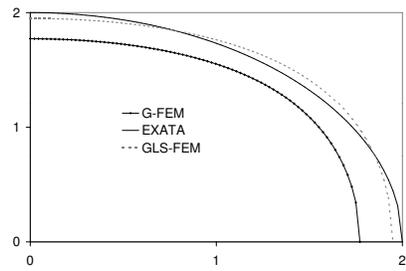


Figura 4: Estudo de dispersão dos métodos de Galerkin(G-FEM) e Galerkin Mínimos Quadrados para  $kh = 2$

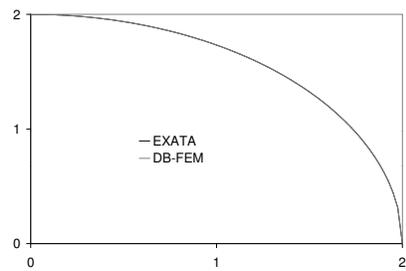


Figura 5: Estudo de dispersão do método de elementos finitos desconínuos em nível de elemento (DB-FEM) para  $kh = 2$

## 5 Resultados Numéricos

Apresentamos alguns resultados de simulações realizadas com os métodos de Galerkin, QS-FEM e o método de elementos finitos descontínuos no nível de elemento. Serão considerados erros relativos na norma  $L^2$  e na seminorma de  $H^1$  como definidos a seguir

$$e_0 = \frac{\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}},$$
$$e_1 = \frac{|u - u_h|_{H^1(\Omega)}}{|u|_{H^1(\Omega)}}.$$

Consideramos o problema de Helmholtz em domínio quadrado de lado unitário com  $f(x, y) = 0$  e condições de contorno de Dirichlet adequadamente definidas de modo que a solução exata seja a parte real de uma onda plana na direção  $\theta$ , isto é  $u(x, y) = \cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta))$ .

A Figura 6 apresenta o erro relativo na norma  $L^2$  da solução por elementos finitos descontínuos em nível de elemento (DB-FEM) comparado com os correspondentes erros da interpolante (I-FEM), Quase Estabilizado (QS-FEM) e de Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) na norma  $L^2$  em função do ângulo  $\theta$ , para  $k = 100$  e  $kh = 0.625$ . Idêntica comparação é apresentada na Figura 7 para o erro relativo na seminorma de  $H^1$ .

A Figura 8 apresenta gráficos comparativos da solução obtidas com o método de Galerkin Mínimos Quadrados com a solução exata ao longo da direção  $y$  para  $x = 0.5$ ,  $k = 100$  e uma malha uniforme com (160x160) elementos. Igual comparação é apresentada na Figura 9 entre o método de elementos finitos descontínuo em nível de elemento e a solução exata. Este experimento foi realizado com  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , que corresponde à direção mais desfavorável para o método de elementos finitos descontínuos em nível de elemento. Os resultados atestam o excelente desempenho da formulação proposta.

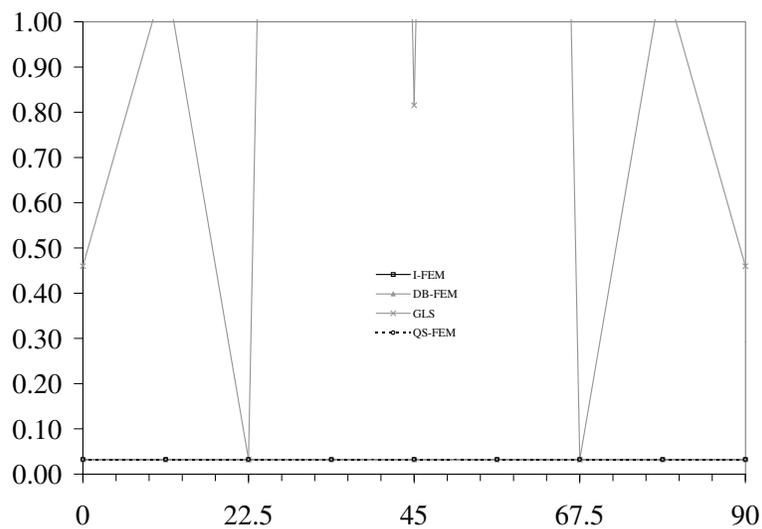


Figura 6: Erro relativo na norma  $L^2$  em função da direção  $\theta$  para  $k = 100$  e  $kh = 0.625$

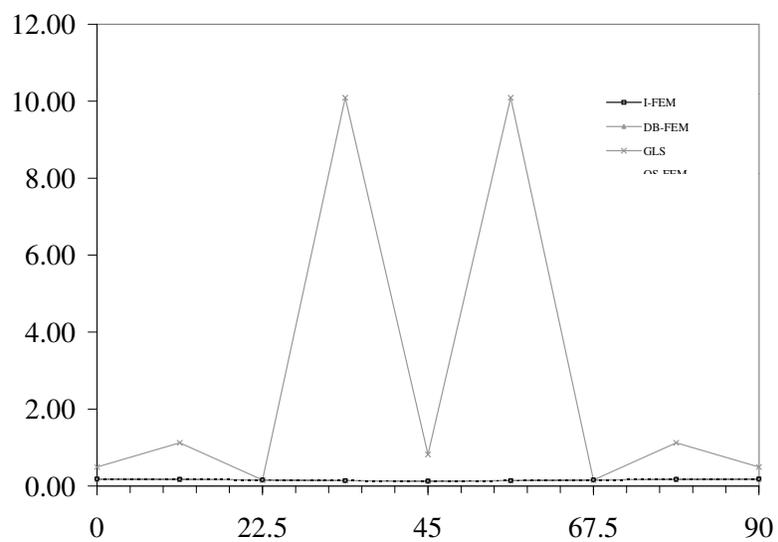


Figura 7: Erro relativo na seminorma de  $H^1$  em função da direção  $\theta$  para  $k = 100$  e  $kh = 0.625$

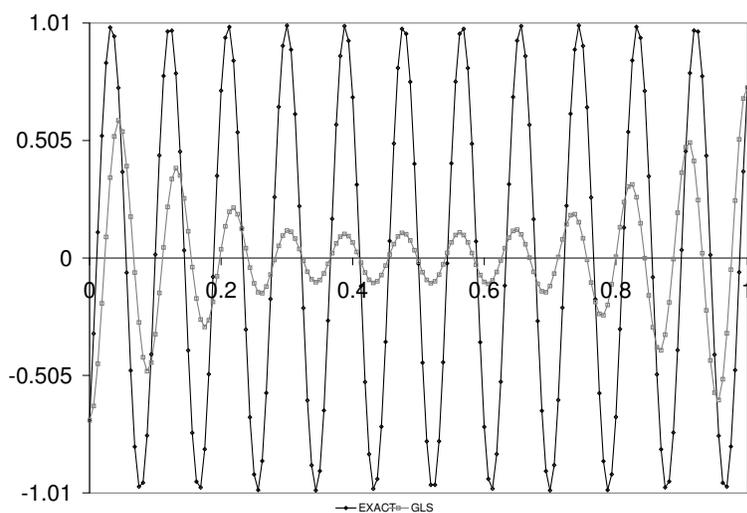


Figura 8: Gráficos das soluções na secção  $x = 0.5$  para  $k = 100$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ : GLS e solução exata

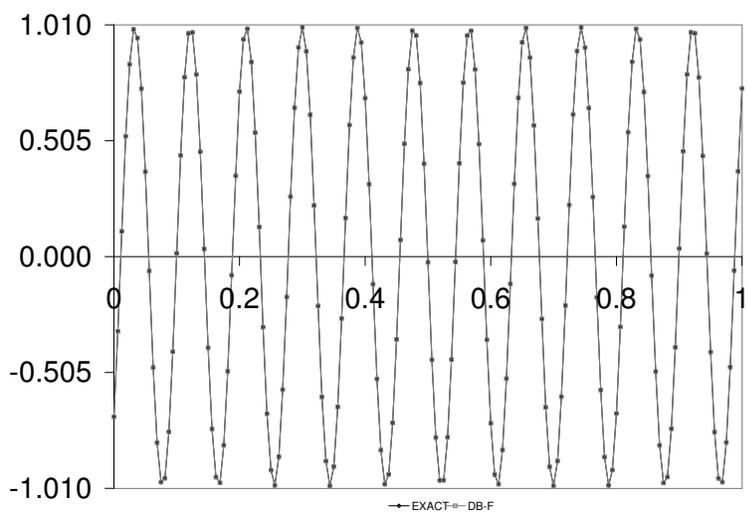


Figura 9: Gráficos das soluções na secção  $x = 0.5$  para  $k = 100$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ : DB-FEM e solução exata

## 6 Conclusões

São apresentadas duas formulações de elementos finitos para o problema de Helmholtz em domínios limitados. Uma formulação completamente descontínua onde a continuidade é relaxada na interface dos elementos e uma nova formulação descontínua em nível de elemento onde a continuidade é relaxada apenas no interior dos elementos mantendo-se continuidade na interface dos elementos. Apresentamos, de forma resumida, nossas principais conclusões sobre este estudo:

- Ambas formulações descontínuas dispõem de parâmetros livres que são adequadamente selecionados para garantir melhores propriedades de estabilidade e precisão
- Experimentos numéricos e uma análise de dispersão para a formulação descontínua em nível de elemento atestam as propriedades de estabilidade e precisão das formulações propostas para escolhas apropriadas dos parâmetros livres
- Os graus de liberdade interiores, associados a bolhas descontínuas, não necessitam ser polinômios de alta ordem e podem ser eliminados no nível dos macro-elementos
- Para a formulação descontínua em nível de elemento são obtidas expressões explícitas para os parâmetros de estabilização eliminando-se o erro de fase em duas direções fixadas
- O estêncil ótimo do método de elementos finitos quase estabilizado (QS-FEM) é obtido consistentemente escolhendo apropriadamente os parâmetros de estabilização

## REFERENCIAS

- [1] I. Harari and T.J.R. Hughes, Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: Model problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 87 (1991) 59-96.
- [2] F. Ihlenburg and I. Babuška, Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I: The h-version of the FEM, *Comput. Math. Appli.* 30, No. 9 (1995) 9-37.
- [3] I. Harari and T.J.R. Hughes, Galerkin/least squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 98 (1992) 411-454.
- [4] L.L. Thompson and P.M. Pinsky, A Galerkin least squares finite element method for the two-dimensional Helmholtz equation, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38, No. 3 (1995) 371-397.
- [5] I. Babuška, F. Ihlenburg, E.T. Paik and S.A. Sauter, A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 128 (1995) 325-359.

- [6] T. J. R. Hughes, Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 127, No. 1/4 (1995) 387-401.
- [7] L.P. Franca, C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, Residual-free bubbles for the Helmholtz equation, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 40 (1997) 4003-4009.
- [8] L. P. Franca, A. P. Macedo, A two-level finite element method and its application to the Helmholtz equation, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 43, No. 1 (1998) 23-32.
- [9] J.L. Cipolla, Subgrid modeling in a Galerkin method for the Helmholtz equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177 (1999) 35-49.
- [10] C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, A two-level domain decomposition method for the iterative solution of high frequency exterior Helmholtz problems, *Numer. Math.* 85 (2000) 283-308.
- [11] C. Farhat, I. Harari, L. Franca, The discontinuous enrichment method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) 6455-6479.
- [12] C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003) 1389-1419.
- [13] E. G. Dutra do Carmo and A. V. C. Duarte, New formulations and numerical analysis of discontinuous Galerkin methods, *Computational and Applied Mathematics* 21 No. 3 (2002) 661-715.
- [14] G. B. Alvarez, A. F. D. Loula, E. G. Dutra do Carmo and F. A. Rochinha, A discontinuous finite element formulation for the Helmholtz equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* submitted.