NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 2- Funções.

2.1 - Funções e seqüência de números reais. Domínio, contradomínio e imagem de funções.

2.2 - Formas de expressar e classificação de funções. Funções implícitas, compostas e inversas.

2.3 - Funções elementares básicas. Gráficos de funções.

2.1 - Funções e seqüência de números reais. Domínio, contradomínio e imagem de funções.

Definição 1 *Sejam X e Y dois conjuntos. Se a cada elemento $x \in X$ se faz corresponder, através de uma certa relação, um e somente um elemento $y \in Y$, que denotaremos por $y = f(x)$, se diz que sobre o conjunto X esta definida a função f. O conjunto X é chamado de dominio da função f, e o conjunto $\{y \in Y : \text{ existe } x \in X \text{ e } f(x) = y\}$ é chamado de imagem de f e o conjunto Y chama-se codominio de f. A variavel x é chamada de argumento ou variavel independente. A variavel y é chamada de variavel dependente.*

Note que para determinar por completo uma função é necessario especificar o dominio X, o codominio Y e a relação de correspondencia entre os elementos de X e Y. Também, de forma mais geral, os elementos de X e Y não necessariamente devem ser números. Particularmente, estamos interessados nas funções que seu dominio e codominio são subconjuntos dos números reais. Neste caso a função é chamada de função real de uma variavel real.

Para as funções reais é possivel definir as operações aritmeticas fundamentais similarmente a como foi definido para os números reais.

Sejam f e g funções definidas no mesmo conjunto S. Nós podemos definir a soma $f + g$ de duas funções como sendo a função cujo valor no elemento x de S é $f(x) + g(x)$. Então a associatividade para a adição de números nos leva a associatividade para a adição de funções. Ou seja, sejam f, g e h funções definidas em S, então $(f + g) + h = f + (g + h)$. Similarmente, temos para a comutatividade $f + g = g + f$. Além disto, também temos a função zero, cujo valor para todo elemento x de S é 0. Esta função é denotada por 0, e tal que para qualquer função f definida em S temos $f + 0 = 0 + f = f$. Também, podemos definir para uma função f definida em S a função $-f$ de forma tal que $f + (-f) = 0$, ou seja, a função zero. Assim podemos ver que as funções satisfazem as mesmas regras básicas dos números para a adição. O mesmo pode ser dito para a multiplicação.

Se f e g são funções definidas no mesmo conjunto S, definimos o produto fg como sendo a função cujo valor no elemento x é o produto $f(x)g(x)$, ou seja, por definição $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Este produto é comutativo e associativo. Mais ainda, se 1 denota a função constante que possue valor 1 para todos os elementos x de S, então temos as usuais regras $1f = f$ e $0f = 0$. Também, a multiplicação de funções é distributiva com respeito a adição: $((f + g)h)(x) = (f + g)(x)h(x) = (f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x) =$

$(fh)(x) + (gh)(x) = (fh + gh)(x)$, ou seja, $(f + g)h = fh + gh$.

2.2 - Formas de expressar e classificação de funções. Funções implícitas, compostas e inversas.

Existem diferentes formas de expressar uma função:

1) **Forma analítica:** a relação de correspondencia ou dependencia funcional é expressada através de fórmulas.

Exemplo: $y = f(x) = x$. Neste exemplo é possível separar as duas variaveis. Isto é, do lado esquerdo somente tem y e do lado direito uma formula que somente tem x. Quando isto pode ser feito se diz que a funão está em sua forma explicita. A forma implicita é quando não é possível separar y de x, e será vista mais abaixo.

Este método analítico apressenta insuficiencias como, nem toda função pode ser expressada através de fórmulas (analiticamente), e também algumas expressões analíticas são muito complicadas que dificultam seu uso.

2) **Forma descriptiva:** a relação de correspondencia é descrita com palavras. É muito provável que esta seja a forma mais antiga de representar funções, e ainda é usada quando não temos muita informação. Por exemplo, se apenas temos dados qualitativos esta é a forma mais apropriada, já que é impossível de estabelecer formulas se não existem dados quantificados ou transformados em números. Muitas ciências ainda usam esta forma, por exemplo, a biologia, as ciências sociais, etc. Em seus primordes a física era escrita desta forma, onde os livros não tinham formulas.

3) **Forma gráfica:** a correspondencia se estabelece através de um gráfico no plano coordenado. Entendemos por gráfico da função $y = f(x)$ o conjunto de pontos ou pares ordenados $(x, f(x))$, onde x é um elemento do dominio da função.

4) **Forma tabelada:** a correspondencia neste caso é estabelecida entre um número finito de elementos de X e suas respetivas imagens em Y. A correspondencia entre os valores do argumento da função e a sua imagem que não estão tabelados, pode ser estabelecida usando o método de interpolação, que consiste em aproximar a função por alguma outra função mais simples (geralmente na forma analítica).

5) **Forma de composição de funções:** Outra forma de expressar uma função é através da operação de composição de funções.

Definição 2 *Sejam $f : X \to Y$ e $g : V \to W$ duas funções reais e tal que a $Imf \subset Domg$, então estabelecemos uma correspondencia entre cada $x \in Domf$ e cada $w \in Img$ da seguinte forma: $w = g(y)$, onde $y = f(x)$. Esta função $w = g(f(x))$ é chamada de função composta e se denota também por $w = (g \circ f)(x)$.*

Note que a função composta não está definida para os elementos x tais que $f(x) \notin \mathrm{Dom}g$, nem para os elementos $v \in \mathrm{Dom}g$ que não são imagem de f para algum $x \in \mathrm{Dom}f$. Além disto, de forma geral esta operação de composição não é comutativa, ou seja, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Exemplo: $y = f(x) = x^2$ com Dom $f = \{x \in \mathbb{R}\}$ e Im $f = \{y \in \mathbb{R}/y \geqslant 0\}$ e $w = g(v) = \sqrt{v}$ com Dom $g = \{v \in \mathbb{R}/v \geqslant 0\}$ e Im $g = \{w \in \mathbb{R}/w \geqslant 0\}$,

$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, $\forall x \geqslant 0$,

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Neste exemplo $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

6) **Forma implicita:** a correspondencia neste caso é estabelecida por uma equação que não está resolvida com respeito a variavel dependente.

Exemplo: $yx^3 + x\ln(y) = 1$.

Função inversa

Definição 3 *Seja $f : X \to Y$ uma função bijetora. A função inversa de f é definida como sendo a função $g : Y \to X$, tal que $y = f(g(y))$. A função $x = g(y)$ é também denotada por $x = f^{-1}(y)$.*

Note que para definir a função inversa foi usado o conceito de função composta. Também, a condição de f ser sobrejetora garante que para todo $y \in Y$ a equação $y = f(x)$ tem solução com respeito a x, e a condição de f ser injetora garante que este x seja unico.

Exemplo: $y = x^2$ não é injetora porque $(-x_o)^2 = (x_o)^2$. Agora, se você redefine $y = x^2$ tal que $x \geqslant 0$ a nova função é injetora e existe a função inversa $x = \sqrt{y}$, já que $y = (\sqrt{y})^2 = y$ aqui estamos limitados a $y \geqslant 0$.

2.3 - Funções elementares básicas. Gráficos destas funções.

Se chama função elementar a toda função que pode ser expressada através de formulas que contem um número finito de operações aritméticas e composições de funções elementares basicas.

Por função elementar basica definimos as seguintes funções:

1) **função constante:** $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ e c é um número fixo.

2) **função potencia:** $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

3) **função exponencial:** $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

4) **função logaritmo:** $y = log_a x$, $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

5) **funções trigonometricas:** $y = sen(x)$, $y = cos(x)$ e suas funções inversas $y = arcsen(x)$, $y = arccos(x)$.

As funções trigonometricas $y = tg(x)$, $y = ctg(x)$ e suas inversas $y = arctg(x)$, $y = arcctg(x)$ são exemplos de funções elementares.

As funções elementares se dividem em dois grandes grupo: as funções elementares algébricas e as funções elementares transcendentais. Como exemplo de funções algébricas podemos mencionar as funções polinomiais e racionais. Entre as funções transcendentais encontramos todas as funções trigonometricas, as funções exponenciais e as logaritmicas.

Função exponencial

Nós já falamos sobre potencias do tipo $a^{\frac{m}{n}}$, onde a é um número positivo, m e n são inteiros, isto é, potencias com exponente dado por uma fração. É dificil fazer um desenvolvimento analitico da teoria de potencias a^x quando x não é uma fração. Mas, pelo menos podemos estabelecer as propriedades básicas, que são intuitivamente claras e usar estas propriedades nas aplicações.

Seja a um número positivo ($a > 0$). A cada número x nós associamos um número denotado por a^x, tal que quando $x = \frac{m}{n}$ é um cociente de inteiros ($n \neq 0$), então $a^{\frac{m}{n}}$ é a potencia a uma fração ordinaria, e tal que a função $x \mapsto a^x$ possue as seguintes propriedades.

1) Para todos os números x_1 e x_2, temos $a^{(x_1+x_2)} = a^{x_1}a^{x_2}$.

2) Para todos os números x_1 e x_2, temos $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

3) Se a e b são positivo, então $(ab)^x = a^x b^x$.

4) Assuma que $a > 1$. Se $x_1 < x_2$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$.

A função $x \mapsto a^x$ é chamada de função exponencial de base a. Para ela também é valido que $a^{-x}a^x = a^{(x-x)} = a^0 = 1$, e portanto $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Os valores da função exponencial sempre são positivos. Note que se $x > 0$, e $a > 1$, então $a^x > 1$ porque $a^0 = 1$ e a função exponencial é crescente de acordo com a propriedade 4). Se $x < 0$, ou seja, $x = -z$ onde z é positivo, então $a^x = a^{-z} = \frac{1}{a^z}$ e novamente vemos que a^x é positivo.

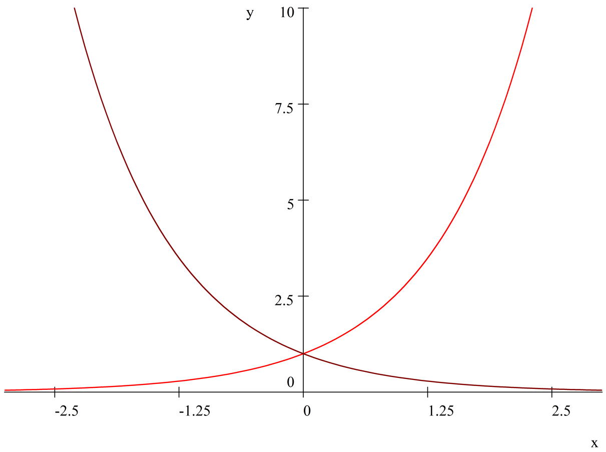

Figure 1: Função exponêncial: $y = a^x$ e $y = (\frac{1}{a})^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Função logaritmo

Seja a um número positivo ($a > 0$). Se $y = a^x$ se diz que x é o *log* de y de base a, e escrevemos $x = \log_a y$. Ou seja, a função logaritmo é a inversa da exponencial.

A função *log* é definida para todos os números positivos. Nós não provaremos isto, más assumimos que dado um número $y > 0$, existe um número x tal que $a^x = y$. Agora podemos provar propriedades do *log* que são similares à da função exponencial.

1) Para qualesquer números x_1 e x_2 temos, $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

2) Temos, $\log_a 1 = 0$.

3) Se $x_1 < x_2$, então $\log_a x_1 < \log_a x_2$ se $a > 1$ (função crescente).

4) Se $x_1 < x_2$, então $\log_a x_1 > \log_a x_2$ se $a < 1$ (função decrescente).

5) $\log_a x^b = b \log_a x$.

6) Sejam a e b positivos e diferentes de 1, então $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Estas propriedades podem ser provadas a partir das correspondentes propriedades da função exponencial.

Prova: 1) Seja $u = \log_a x_1$ e $v = \log_a x_2$. Isto significa que $x_1 = a^u$ e $x_2 = a^v$. Portanto, $x_1 x_2 = a^u a^v = a^{u+v}$. Por definição, $\log_a(x_1 x_2) = u + v = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

2) Por definição, já que $a^0 = 1$, isto significa que $0 = \log_a 1$.

3) Seja $x_1 < x_2$. Seja $u = \log_a x_1$ e $v = \log_a x_2$. Então $a^u = x_1$ e $a^v = x_2$. Se $u = v$, então $x_1 = x_2$, que é impossível. Se $v < u$, então pela propriedade 4) da exponencial

$a^v < a^u$ e encontramos que $x_2 < x_1$, que também é impossível. Consequentemente devemos ter $u < v$, o que prova a propriedade 3) do logaritmo.

6) Partimos de $x = a^{\log_a x}$, já que o logaritmo é a função inversa da exponencial. Agora se aplicamos logaritmo de base b à identidade anterior obtemos $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \log_b a$, e agora só falta colocar em evidência $\log_a x$.

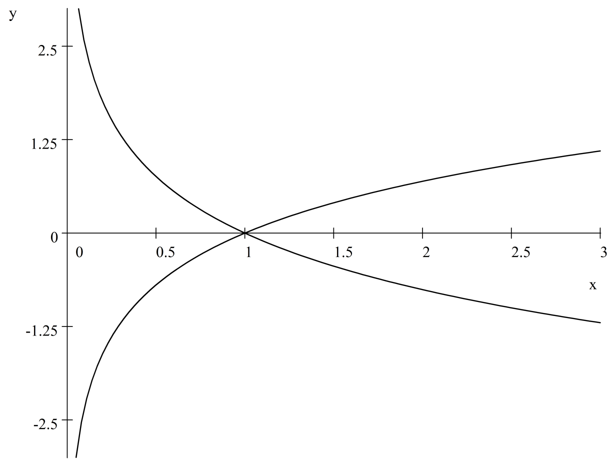

Figure 2: Função logaritmo: $y = \log_a(x)$ e $y = \log_{\frac{1}{a}}(x)$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Funções trigonometricas.

Existem duas funções trigonometricas basicas que verificam três propriedades fundamentais. Estas funções são $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$.

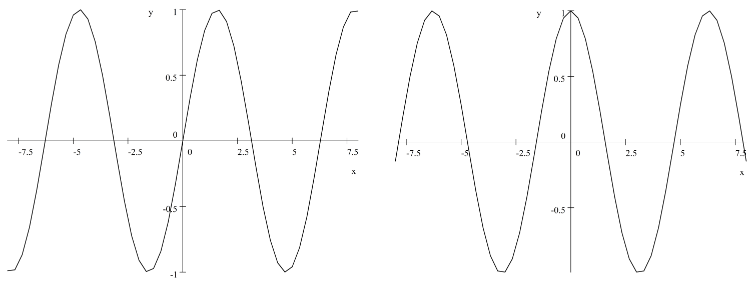

Figure 3: Funções trigonomêtricas: $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$.

Propriedades fundamentais:

1) Sejam x_1, x_2 e x números reais, então:
$sen(x_1 + x_2) = sen(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)sen(x_2)$,
$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - sen(x_1)sen(x_2)$,
$sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
2) $sen(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
3) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então, $0 < sen(x) < x$.
Estas tês propriedades permitem deducir muitas outras propriedades importantes como:
4) $|sen(x)| \leqslant 1$, $|\cos(x)| \leqslant 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
5) $\cos(-x) = \cos(x)$, $sen(-x) = -sen(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
6) Sejam x_1 e x_2 números reais, então:

$sen(x_1 - x_2) = sen(x_1)\cos(x_2) - \cos(x_1)sen(x_2)$,
$\cos(x_1 - x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) + sen(x_1)sen(x_2)$.
7) Sejam x_1 e x_2 números reais, então:
$sen(x_1) + sen(x_2) = 2sen(\frac{x_2+x_1}{2})\cos(\frac{x_2-x_1}{2})$,
$sen(x_1) - sen(x_2) = 2\cos(\frac{x_2+x_1}{2})sen(\frac{x_2-x_1}{2})$.
Provaremos a primeira propriedade deste item:
$sen(x_2) = sen(\frac{x_2+x_1}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}) = sen(\frac{x_2+x_1}{2})\cos(\frac{x_2-x_1}{2}) + \cos(\frac{x_2+x_1}{2})sen(\frac{x_2-x_1}{2})$,
$sen(x_1) = sen(\frac{x_2+x_1}{2} - \frac{x_2-x_1}{2}) = sen(\frac{x_2+x_1}{2})\cos(\frac{x_2-x_1}{2}) - \cos(\frac{x_2+x_1}{2})sen(\frac{x_2-x_1}{2})$,
sumando ambas equações termo a termo segue $sen(x_1)+sen(x_2) = 2sen(\frac{x_2+x_1}{2})\cos(\frac{x_2-x_1}{2})$.
8) $|sen(x)| \leqslant |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
9) $\cos(x) = sen(\frac{\pi}{2} - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
10) $sen(x + 2\pi) = sen(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Qualquer outra função trigonometrica pode ser obtida como combinações das funções $sen(x)$ e $cos(x)$ através de: $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$, $sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ e $csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$. A seguir mostramos seu respetivos gráficos e as inversas:

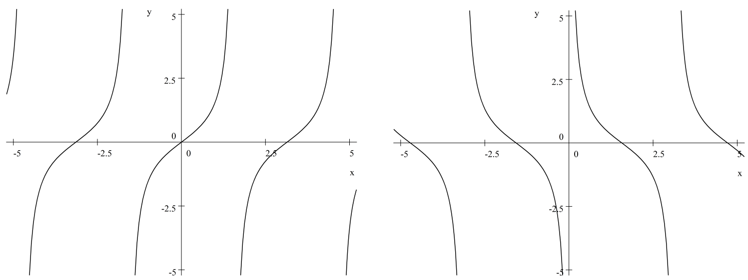

Figure 4: Funções trigonomêtricas tangente $y = tg(x)$ e cotangente $y = ctg(x)$.

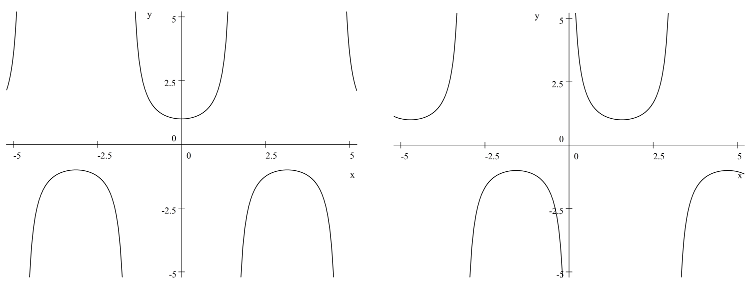

Figure 5: Funções trigonomêtricas secante $y = sec(x)$ e cosecante $y = csc(x)$.

Funções polinomiais

Uma função f definida para todos os números reais é chamada um polinômio se existem números a_0, a_1, ..., a_n tal que para todo número x temos $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Quando um polinômio pode ser escrito desta forma, dezimos que é um polinômio de grau menor ou igual a n ($\leqslant n$). Se $a_n \neq 0$ se diz que o polinômio tem grau n.

Seja f um polinômio. Se $\overline{x}$ é um número tal que $f(\overline{x}) = 0$ se diz que $\overline{x}$ é uma raiz ou zero de f (também chamado de zero da função). Por exemplo, seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, então as raizes deste polinômio já são conhecidas por nós. Se $b^2 - 4ac = 0$, então o polinômio

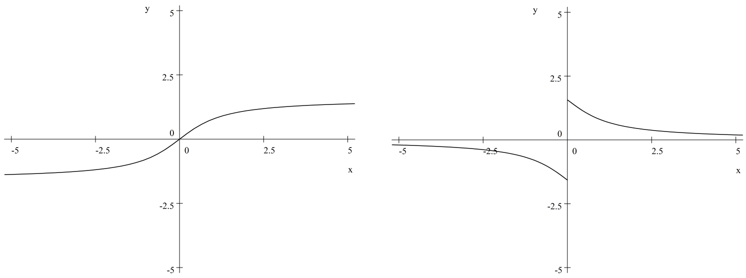

Figure 6: Funções trigonomêtricas arcotangente $y = arctg(x)$ e arcocotangente $y = arcctg(x)$.

tem uma raiz real $\overline{x} = -\frac{b}{2a}$. Se $b^2 - 4ac > 0$, então o polinômio possue duas raizes reais diferentes $\overline{x}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Teorema 1 *Seja f um polinômio de grau $\leqslant n$ e seja $\overline{x}$ uma raiz de f. Então existe um polinômio g de grau $\leqslant (n-1)$ tal que para todo número x temos $f(x) = (x - \overline{x})g(x)$.*

Prova: Escriva $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Substitua o valor $x = (x - \overline{x}) + \overline{x}$ no lugar de x. Cada potência $((x - \overline{x}) + \overline{x})^k$, $k = 0, ..., n$, pode ser escrita como a soma de potências de $(x - \overline{x})$ vezes um número. Portanto, existe um número b_0, b_1, ..., b_n tal que para todo x, $f(x) = b_0 + b_1(x - \overline{x}) + ... + b_n(x - \overline{x})^n$. Más, $f(\overline{x}) = 0$ e $0 = f(\overline{x}) = b_0$ e todos os outros termos do lado direito são zero para $x = \overline{x}$. Isto prova que $b_0 = 0$ e então podemos extraer fator comum $(x - \overline{x})$, $f(x) = (x - \overline{x})\left(b_1 + ... + b_n(x - \overline{x})^{n-1}\right)$. Fazendo $g(x) = b_1 + ... + b_n(x - \overline{x})^{n-1}$ fechamos a prova do teorema.$\square$

Note que, quando expandimos a potencia $((x-\overline{x})+\overline{x})^k$ em termos de $(x-\overline{x})$, o termo de maior pontencia é $(x - \overline{x})^k$ e portanto $b_n = a_n$ e $g(x) = b_1 + ... + a_n(x - \overline{x})^{n-1} = a_n x^{n-1}+$ potencias menores.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$. Posteriormente apresentaremos como encontrar o polinômio g dado o polinômio f e conhecida uma raiz de f. Este procedimento se chama divisão de polinômios.

Teorema 2 *Seja f um polinômio. Sejam a_0, a_1, ..., a_n números tal que $a_n \neq 0$ e para todo x temos $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Então f tem no máximo n raizes reais.*

Prova: Sejam x_1, x_2, ..., x_r as distintas raizes de f. Suponha que $r \geqslant n$. Escriva $f(x) = (x - x_1)g_1(x)$ para algum polinômio g_1 de grau $\leqslant n-1$. Então, $0 = f(x_2) = (x_2 - x_1)g_1(x_2)$. Como $x_2 \neq x_1$, segue que $g_1(x_2) = 0$. Ou seja, x_2 é uma raiz de g_1, que tem grau $\leqslant n-1$. Agora podemos proceder de forma semelhante fatorando $g_1(x) = (x - x_2)g_2(x)$. Novamente $g_2(x_3) = 0$, e g_2 tem grau $\leqslant n-2$. Continuando com o procedimento até encontrar que $g_n(x)$ é uma constante e escrevemos que para todo x, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)c$. Lembrando que o número que multiplica a maior potencia é a_n, segue que $c = a_n \neq 0$. Assim, se $x \neq x_i$ para todo $i = 1, ..., n$, se verifica que $f(x) \neq 0$. Isto significa que f tem no máximo n raizes, e portanto o teorema está provado.$\square$

Será que é possivel ter outros números b_0, b_1, ..., b_m tal que para todo x tenhamos $f(x) = b_m x^m + ... + b_0$?

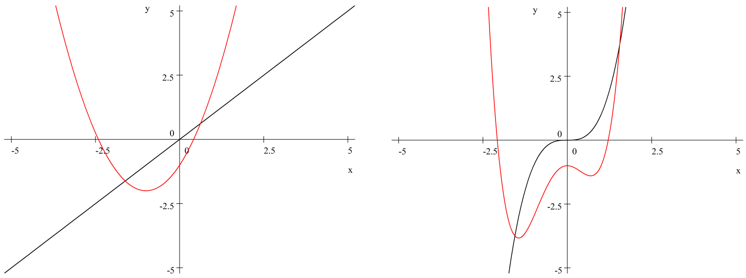

Figure 7: Funções polinomiais: ($y = x$ e $y = x^2 + 2x - 1$) e ($y = x^3$ e $y = x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$).

Corolario 1 *Seja f um polinômio, que pode ser escrito na forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ e também na forma $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0$. Então, $a_i = b_i$ para todo $i = 1, ..., n$.*

Prova: Considere o polinômio $0 = f(x) - f(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_0 - b_0)$. Nós temos que provar que $(a_i - b_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Seja $d_i = a_i - b_i$. Suponha que existe algum indice i tal que $d_i \neq 0$. Seja m o maior destes indices, de forma que possamos escrever $0 = d_m x^m + ... + d_0$ para todo x e $d_i \neq 0$. Isto contradiz o segundo teorema. Portanto concluimos que $d_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.$\square$

O colorario estabelece que se f é um polinômio, então existe uma única forma de escrever f na forma $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$ para todo x. Isto é, os números a_0, a_1, ..., a_n são unicamente determinadados e costumam ser chamados de coeficientes. Se $a_n \neq 0$, então dizemos que f tem grau n.

Suponha que f é um polinômio. Frequentemente, sucede que para algum x, $f(x) = 0$. Isto é, pode existir um número $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Isto não quere dizer que f seja o polinômio zero. Por definição, nós chamamos f de polinômio zero se e somente se $f(x) = 0$ para todo número x. Assim, o polinômio zero é aquele que tem todos seus coeficientes iguais a zero. Se algum coeficiente do polinômio não é igual a zero, então f não é o polinômio zero.

Nós já aprendimos a determinar os zeros dos polinômios de grau 2. Para polinômios de graus maiores, é muito mais dificultosso determinar suas raizes, exceto em casos muito especiais. Para polinômios de graus 3 e 4, podemos ter formulas envolvendo radicais, mas é assumido como resultado classico que tais formulas não podem ser dadas em geral pelo menos para polinômios de grau 5.

Pode-se estabelezer uma anologia entre a divisão de polinômios e a divisão de números inteiros.

Sejam n e d inteiros $n > d$. Então, existe um inteiro r tal que $0 \leqslant r < d$, e um inteiro $q \geqslant 0$ tal que $n = qd + r$.

Exemplo: Seja $n = 7$ e $d = 3$, então $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

O procedimento analogo para polinômios é chamado de algoritmo euclideano.

Algoritmo euclideano. Sejam f e g polinômios não zero. Então existem polinômios q, r tal que *grau* $r <$ *grau* g e tal que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$.

Exemplo: Sejam $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 2$ e $g(x) = x^2 + 1$.

Primeiro determinamos $4x$ porque $4xx^2$ é igual ao termo de maior grau de f, isto é, igual a $4x^3$. Então multilicamos $4x$ por x^2+1 e obtemos $4x^3+4x$, que escrevemos abaixo de $f(x)$, tomando o quidado de colocar cada potencia de x abaixo da outra. Subtraemos $4x^3+4x$ de $4x^3+3x^2+x+2$, obtendo $3x^2-3x+2$. Repetimos o procedimento determinando 3, porque $3x^2$ é igual ao termo de maior grau de $3x^2-3x+2$. Multiplicamos 3 por x^2+1 e obtemos $3x^2+3$, que escrevemos abaixo de $3x^2-3x+2$. Fazemos a subtração obtendo $-3x-1$. Observamos que o polinômio $-3x-1$ tem grau 1, que é menor que o grau de $g(x)$. Portanto nosso calculo finalizou. O polinômio $r(x)$ é chamado de residuo do algoritmo euclideano.

$$
\begin{array}{rl|l}
f(x) = & 4x^3+3x^2+x+2 & g(x)=x^2+1 \\
& \underline{-(4x^3+0x^2+4x+0)} & 4x+3=q(x) \\
& 3x^2-3x+2 & \\
& \underline{-(3x^2+0x+3)} & \\
& -3x-1 = r(x) &
\end{array}
$$

Ou seja, $\underbrace{4x^3+3x^2+x+2}_{f(x)} = \underbrace{(4x+3)}_{q(x)}\underbrace{(x^2+1)}_{g(x)} + \underbrace{(-3x-1)}_{r(x)}$

O algoritmo euclideano permite provar de outra forma que se $f(x)$ tem uma raiz $\overline{x}$, então podemos escrever para algum polinômio q, $f(x)=(x-\overline{x})q(x)$. Ou seja, no algoritmo euclideano, temos $f(x)=(x-\overline{x})q(x)+r(x)$, onde $grau\ r<1$. Portanto r deve ser constante, igual a um número a. Subtituindo em ambos lados da equação o valor $x=\overline{x}$. Obtemos $0=0+a$, portanto $a=0$. O residuo é igual a 0, que finaliza nossa prova. Nós não provamos o algoritmo euclideano. A prova consiste em realizar o procedimento do exemplo com coeficientes gerais.

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.

2- Serge Lang, Cálculo, V1.

3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.

4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.

5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.

6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.

7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.

9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.

10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.

11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.