NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 4- Continuidade de Funções.
4.1 - Definição de continuidade de funções.
4.2 - Pontos de descontinuidades.
4.3 - Propriedades locais e globais das funções contínuas.

4.1 - Definição de continuidade de funções.

Definição 1 *A função $f(x)$ é dita ser continua no ponto $x = x_o$ se:*
i) a função é definida no ponto x_o, isto é, existe o número $f(x_o)$,
ii) exiete e é finito o $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$,
iii) este limite é igual ao valor da função no ponto x_o. Isto é, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Quando alguma destas três condições não é verificada, dizemos que no ponto x_o a função f é descontínua.

Se a função é continua em cada um dos pontos x do seu domínio, dizemos que é contínua em todo seu domínio.

Se na definição anterior trocamos o limite pelo limite lateral obtemos o conceito de continuidade lateral.

Esta definição de continuidade pode ser refrazeada utilizando os termos de vizinhança, de limite e de convergencia de funções anteriormente estudados.

Agora vamos refrazear-la nos termos de infinitesimos. Para isto, considere o incremento do argumento da função no ponto x_o como sendo $\Delta x = x - x_o$, e denotaremos o incremento da função f por $\Delta f = f(x) - f(x_o)$. Então, podemos dizer que f é continua em x_o, se e somente se, a um incremento infinitesimo do argumento de f corresponde um incremento infinitesimo da função. Isto é, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.

Exemplos:

1) Prove que $f(x) = x$ é continua para todo $x_o \in \mathbb{R}$.
$\Delta y = f(x) - f(x_o) = x - x_o = \Delta x$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$. Ou seja, $f(x) = x$ é continua no intervalo $(-\infty, \infty)$.

2) $y = sgn(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$, é descontínua no ponto $x = 0$, já que não existe o limite quando $x \to 0$. Mais ela é contínua para o restantes valores de x, ou seja, é contínua em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.

3) A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não é continua no ponto $x = 1$, já que $1 \notin Dom f$. No entanto neste ponto existe o limite: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.

4) A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \end{cases}$ é continua em x=1, já que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$.

5) A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua para todo $x_o > 0$.

$\Delta x = x - x_o$

$\Delta y = \sqrt{x} - \sqrt{x_o} = \frac{x - x_o}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x + x_o}+\sqrt{x_o}} = 0$. Como $\sqrt{x}$ não esta definida para $x < 0$, no ponto $x_o = 0$ apenas podemos analizar a continuidade lateral.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$, portanto f é continua em $[0, \infty)$.

Propriedades elementais das funções continuas.

Agora estudaremos algumas propriedades que são consequência da definição de continuidade. Cada uma destas propriedades é um teorema.

P1. Se as funções f e g são continuas em x_o, então as funções $(f \pm g)$ e (fg) são contínuas em x_o. Se $g(x_o) \neq 0$, então a função $(\frac{f}{g})$ também é continua em x_o.

P2. Todo polinomio é contínuo em cada ponto de $\mathbb{R}$.

P3. A função exponencial a^x $(a > 0)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4. As funções trigonometricas são contínuas em todo seu domínio.

P5. Seja a função $y = \varphi(x)$ contínua no ponto x_o e a função $z = f(y)$ contínua no ponto $y_o = \varphi(x_o)$, então a função composta $f \circ \varphi$ é continua em x_o. Isto é, $\lim\limits_{x \to x_o} f(y) = \lim\limits_{x \to x_o} f(\varphi(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to x_o} \varphi(x)\right) = f(\varphi(x_o))$.

4.2 - Clasificação dos pontos de descontinuidades.

Definição 2 *Seja x_o um ponto do intervalo I. Seja f uma função cujo domínio contem o intervalo $I^* = I \backslash \{x_o\}$, ou seja, o intervalo I retirando o ponto x_o Dizemos que x_o é um ponto de descontinuidade evitavel para f, se existe o limite de $f(x)$ no ponto x_o, mas a função não está definida no ponto x_o ou então $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) \neq f(x_o)$.*

Exemplo: $f(x) = \frac{senx}{x}$ está definida em toda vizinhança do ponto $x = 0$ e o $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$. Mas a função não está definida em $x = 0$. Este é um exemplo de discontinuidade evitavel.

Quando o $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ não existe dizemos que há uma descontínuidade essencial. Aqui surgem duas posibilidades ou dois tipos de descontinuidade:

i) Quando os limites laterais existem mais são diferentes dizemos que a função f apresenta uma desciontínuidade essencial de primeira espécie.

Definição 3 *Seja $x_o \in I$ e f definida em $I^* = I \backslash \{x_o\} \subset Dom f$. Dizemos que x_o é uma descontinuidade de primeira espécie (ou salto finito) se neste ponto existem limites laterais finitos da função, mas são diferentes. Isto é, $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o^+) \neq \lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o^-)$.*

O salto é definido como a distância entre os dois limites laterais, ou seja, $s = |f(x_o^+) - f(x_o^-)|$.

Exemplo: $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.

ii) Quando pelo menos um dos limites laterais não existe, dizemos que a função f apresenta uma desciontínuidade essencial de segunda espécie.

Exemplo: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, esta função é contínua para todo $x \neq 0$. Para $x > 0$, $\frac{1}{x}$ é sempre positivo. Portanto, quando $x \to 0^+$, $\frac{1}{x}$ é infinitamente grande e positivo, logo $\underset{x \to 0^+}{lim}\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Para $x < 0$, $\frac{1}{x}$ é sempre negativo e infinitamente grande negativo quando $x \to 0^-$, logo $\underset{x \to 0^-}{lim}\, e^{\frac{1}{x}} = \underset{x \to 0^-}{lim} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$. Portanto no ponto $x = 0$ a função $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ possue uma descontinuidade de segunda espécie.

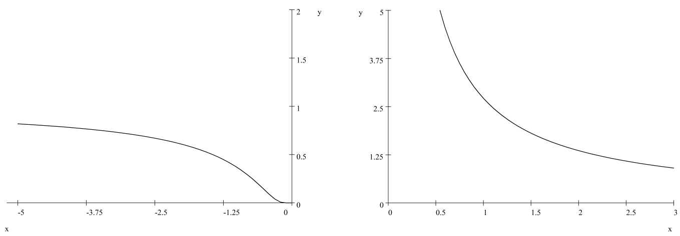

Figure 1: Exemplo de descontinuidade de segunda espécie: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad x \in (-\infty, 0)$ e $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad x \in (0, +\infty)$.

4.3 - Propriedades locais e globais das funções contínuas.

Propriedades locais das funções continuas.

As propriedades locais de uma função são aquelas que dependem do comportamento da função numa vizinhança de um ponto fixo do domínio de f.

Similarmente a como definimos o conceito de conjuntos limitados podemos definir o conceito de função limitada.

Definição 4 *A função $f(x)$ é limitada superiormente (inferiormente) sobre o conjunto X, se existe um número real M (um número real m) tal que, para todo $x \in X$, se verifica $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$. O número M (m) é chamado de limite superior (inferior) da função f sobre o conjunto X.*

Definição 5 *A função $f(x)$ é limitada sobre o conjunto X se é limitada superior e inferiormente.*

Isto pode ser refrazeado como segue. A função $f(x)$ é limitada sobre conjunto X se e somente se existe um número real $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo $x \in X$.

Teorema 1 *Seja f definida numa vizinhança de x_o e com limite finito no ponto x_o. Então, existe um número positivo δ tal que f é limitada na vizinhança $V(x_o, \delta)$.*

Corolário 1 *Se a função f é contínua em x_o, então existe uma vizinhança de x_o $V(x_o, \delta)$, sobre a qual f é limitada.*

Teorema 2 *Seja f contínua no ponto x_o. Então, se $f(x_o) \neq 0$ existe uma vizinhança $V(x_o, \delta)$, tal que nesta vizinhança a função conserva o mesmo sinal que $f(x_o)$.*

Propriedades globais das funções contínuas.

Existem propriedades das funções relacionadas ao comportamento da função em todo seu dominio de continuidade. Estas propriedades são chamadas de globais.

Teorema 3 ***(Bolzano 1)*** *Seja f uma função definida e continua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$. Então, existe um ponto $x_o \in (a, b)$ tal que $f(x_o) = 0$.*

Intuitivamente este teorema expressa a ideia que uma curva continua para passar de um ponto situado abaixo do eixo x para outro situado acima (ou viceversa) deve cortar o eixo x.

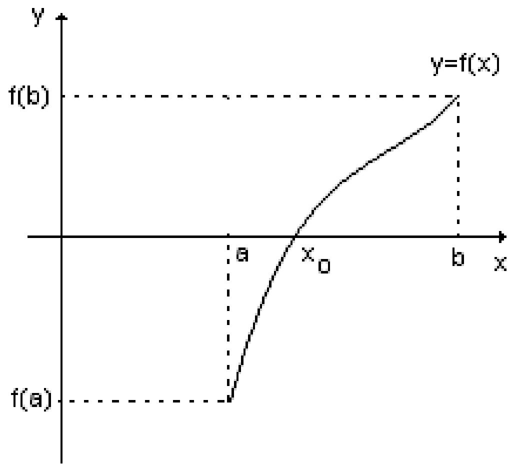

Figure 2: Representação gráfica do teorema de Bolzano 1.

Teorema 4 ***(Bolzano 2)*** *Seja f uma função continua sobre o intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) = \alpha \neq f(b) = \beta$. Seja γ um número arbitrario entre α e β. Então, existe um número $x_o \in (a, b)$ tal que $f(x_o) = \gamma$.*

Isto é, a função alcança todos os valores no intervalo $[\alpha, \beta]$ se $\alpha < \beta$ ou no intervalo $[\beta, \alpha]$ se $\beta < \alpha$.

Teorema 5 ***(Weierstrass 1)*** *Se a função $f(x)$ é continua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então f é limitada no intervalo $[a, b]$. Isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$.*

Geometricamente este teorema nos diz que o gráfico de uma função continua em $[a, b]$ fica limitado entre duas retas paralelas ao eixo x.

Teorema 6 ***(Weierstrass 2)*** *Se a função $f(x)$ é continua em $[a, b]$. Sejam $M = \underset{x\in[a,b]}{Sup} \{f(x)\}$ o supremo (ou menor limite superior da função) e $m = \underset{x\in[a,b]}{Inf} \{f(x)\}$ o infimo (ou maior limite inferior da função), então existem pontos x_1 e x_2 que pertecem a $[a, b]$ tais que $f(x_1) = M$ e $f(x_2) = m$.*

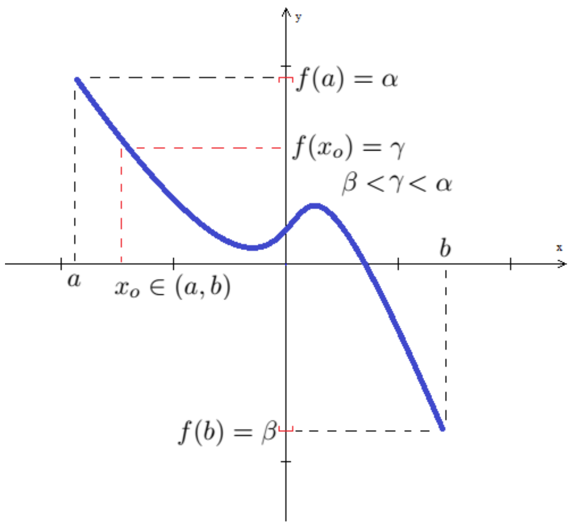

Figure 3: Representação gráfica do teorema de Bolzano 2.

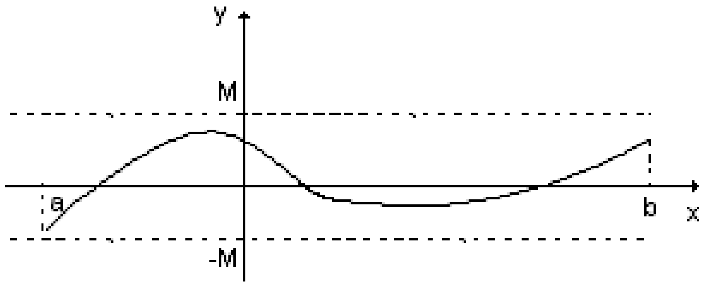

Figure 4: Representação gráfica do teorema de Weierstrass 1.

Conceito de continuidade uniforme

Definição 6 *Segundo Heine existem dois tipos de continuidade para uma função contínua num intervalo I.*

1) Continuidade uniforme: Quando para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in I$ e $|x_1 - x_2| < \delta$ se verifca que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

2) Continuidade não uniforme: Se para certo $\epsilon > 0$ e para todo $\delta > 0$ existem dois números $x_1^\delta, x_2^\delta \in I$ tais que $\left|x_1^\delta - x_2^\delta\right| < \delta$ e $\left|f(x_1^\delta) - f(x_2^\delta)\right| \geqslant \epsilon$.

Exemplo: A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é continua em todo ponto $x \neq 0$. Mas esta continuidade em qualquer intervalo $(0, a)$ é não uniforme, porque a medida que x se aproxima de zero, $x_1^\delta = \frac{1}{2}$ e $x_2^\delta = \frac{1}{6} \Rightarrow \left|x_1^\delta - x_2^\delta\right| = \left|\frac{11}{6}\right| < \frac{12}{6} = 2,\quad \left|f(x_1^\delta) - f(x_2^\delta)\right| = |2 - 6| = |4| \leqslant 4$. Agora escolhendo $x_o = \frac{1}{8}$ temos $\left|x_1^\delta - x_o\right| = \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{15}{8}\right| < \frac{16}{8} = 2$ e $\left|f(x_1^\delta) - f(x_o)\right| = |2 - 8| = |-6| = 6 > 4$.

Mas se considerarmos a mesma função $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre a semireta $x \geqslant 1$ podemos dizer que ela é uniformemente contínua. Para dois números arbitrario da semireta se verifica: $|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1||x_2|} \leqslant |x_2 - x_1|\, n^2$, portanto se escolhemos

$|x_2 - x_1| < \delta = \frac{\epsilon}{n^2}$ obtemos que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Teorema 7 ***(Cantor)*** *Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então $f(x)$ é uniformemente contínua neste intervalo.*

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.

2- Serge Lang, Cálculo, V1.

3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.

4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.

5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.

6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.

7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.

9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.

10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.

11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.