NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 1- Pré-cálculo.
1.1 - Revisão de aritmética e álgebra. Potência, raízes e valor absoluto. Distância.
1.2 - Noções sobre conjuntos, intervalos e expressões lógicas.
1.3 - Equações e inequações que contem uma variável real.
1.4 - Relações entre mais de uma variavel (Duas dimensões).

1.1 - Revisão de aritmética e álgebra. Potência, raízes e valor absoluto. Distância.

1.1.1 - Os números, sua origem e propriedades (Uma dimensão).

Os inteiros.

Tudo parece indicar que os primeiros números criados foram os usados para contar: 1, 2, 3, 4, $\cdots$ até o último objeto que estamos contando, se o conjunto de objetos for finito. Estes números são chamados de inteiros positivos, mas faltava outro número para poder contar: o zero. A estes numeros se lhes chamou números naturais e seu conjunto foi denotado por $\mathbb{N}$. É importante mencionar que alguns autores não incluem o zero no conjunto dos naturais. Isto porque o primeiro registro do zero que conhecemos foi na Índia muito tempo depois do surgimento dos outros inteiros positivos. Também, é interessante mencionar que esta não é a única representação simbólica dos inteiros positivos. Em geral cada civilização criava seus próprios símbolos. Por exemplo, no império romano temos: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, $\cdots$. Notem que os romanos não conheciam o número zero, logo não tinham símbolo para ele. A história dos números é fazcinante e está estreitamente relacionada ao avanço tecnológico e científico das civilizações humanas. Procurem na internet um seriado sobre esta história feito pela BBC de Londres.

Podemos realizar operações de adição e multiplicação entre números naturais que não seram obtidos novos números diferentes deles. A introdução da subtração (a inversa da adição) nós leva aos inteiros negativos: -1, -2, -3, $\cdots$. Em outras palavras, a soma e multiplicação de naturais sempre é um número natural. Porém, quando n e m são naturais $(n - m) \notin \mathbb{N}$ se $m > n$. Para poder incluir estes casos, que tem utilidade prática, foi necessário criar um novo conjunto de números chamado de inteiros e denotado por $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$. Os números inteiros podem ser representados geometricamente numa linha:

A suma (subtração) e o produto entre inteiros é sempre um inteiro. E eles verificam as seguintes regras para a adição e multiplicação:

Regras para adição

Comutativa. Se a e b são inteiros, então $a + b = b + a$

Associativa. Se a, b e c são inteiros, então $(a + b) + c = a + (b + c)$

Regras para multiplicação

Comutativa. Se a e b são inteiros, então $ab = ba$

Associativa. Se a, b e c são inteiros, então $(ab)c = a(bc)$

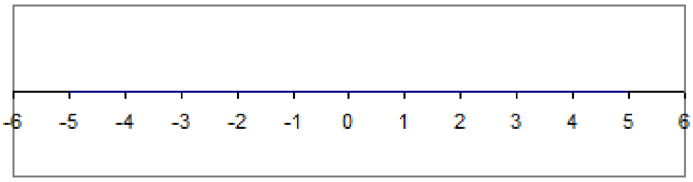


Figure 1: Representação gráfica dos números inteiros $\mathbb{Z}$.

Distributiva. Se a, b e c são inteiros, então $a(b+c) = ab + ac$

Quando nós multiplicamos um número por ele mesmo varias vezes é conveniente usar uma notação abreviada:

$a \cdot a = a^2$,

$a \cdot a \cdot a = a^3$,

$\vdots$

$a \cdot a \cdots a = a^n$ (o produto é tomado n vezes, e dizemos que a^n é a potência n-esima de a). Se m e n são inteiros positivos, então

$a^{m+n} = a^m a^n$,

$(a^m)^n = a^{mn}$.

Exercicio: Prove que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ e que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

A prova é feita aplicando repetidamente as regras de multiplicação.

$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a(a \pm b) \pm b(a \pm b) = aa \pm ab \pm ba + bb = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.$\square$

Definição 1 *Seja m um inteiro positivo. Dizemos que um inteiro positivo é par se ele pode ser escrito na forma $m = 2n$ para algum inteiro positivo n, e que é impar se ele pode ser escrito como $m = 2n \pm 1$.*

Os racionais

Quando introduzimos a divisão de números naturais (inversa da multiplicação), exceto por zero, chegamos as frações ou qoucientes de números naturais. Esta operação pode levar a números que não são inteiros. Isto é, sejam n e m inteiros e considere o quociente $\frac{m}{n}$, onde $n \neq 0$. Então, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ se m é um multiplo de n ($m = kn$, $k \in \mathbb{Z}$). Porém, $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ se m não é um multiplo de n ($m \neq kn$, $k \in \mathbb{Z}$). Para poder incluir estes casos, que tem grande utilidade prática, foi necessário criar um novo conjunto de números chamado de racionais e denotado por $\mathbb{Q}$.

Dizemos que um número é racional se ele pode ser escrito como uma fração: $q = \frac{m}{n}$, onde m, n são inteiros e $n \neq 0$. Simbolicamente este conjunto pode ser representado como $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n};\ m \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ com } n \neq 0\}$.

Não existe uma única representação de um número racional como um quociente de dois inteiros (exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Uma regra que nós permite determinar quando duas expressões de quocientes de inteiros resultam no mesmo número racional é a regra do produto cruzado.

Regra do produto cruzado: Sejam m,n,r e s inteiros. Assuma que $n \neq 0$ e $s \neq 0$. Então $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ se e somente se $ms = rn$.

Nós podemos verificar que a adição de números racionais satisfazem as propriedades comutativas e associativas. Agora devemos apresentar a formula para a multiplicação de números racionais. Sejam $p = \frac{m}{n}$ e $q = \frac{r}{s}$ dois números racionais, então $pq = \frac{m}{n}\frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}$.

Os números racionais satisfazem uma propriedade que os números inteiros não satisfazem, a multiplicação inversa. Se a é um número racional e $a \neq 0$, então existe um número racional denotado por a^{-1}, tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. Além disto, a multiplicação dos números racionais é associativa, comutativa e distributiva com respeito a adição.

Os reais. Sua representação geométrica e relação de ordem.

A soma, diferença, produto e quociente de números racionais sempre é um racional. Porém, somente os números racionais não permitem solucionar todos os problemas que aparecem em nosso dia a dia. Por exemplo, encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, ou resolver $x^2 - 3 = 0$. Os gregos acreditavam que qualquer grandeza fisica poderia, em teoria, ser representada por um número racional. Eles pensavam que o tamanho (valor) da grandeza consistia de um número inteiro de unidades mais alguma fração $\frac{m}{n}$ de outra unidade. No seculo V depois de Cristo, Hippasus of Metapontum demostrou usando um método geométrico que a hipotenusa de um triângulo retângulo não pode ser expressada como a razão de inteiros. Esta tarefa é resolvida introduzindo um novo número, o qual não pode ser expressado como o quociente de dois inteiros e é denominado de irracional, tais como $\sqrt{2}$, π, e, etc. Em outras palavras, quando introduzimos a opração inversa da potência de números racionais surgem casos que não podem ser representados por racionais. Para poder incluir estes casos, que tem grande utilidade prática, foi necessário criar um novo conjunto de números chamado de irracionais e denotado por $\mathbb{I}$.

Os númeos racionais junto com os números irracionais formam o que chamamos de conjunto de números reais e denotamos por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Geometricamente falando os reais correspondem a todos os pontos de uma linha reta. Ou seja, existe uma correspondência (um a um) entre os pontos de uma linha reta e os números reais. A cada ponto podemos associar um número real e viceversa. O primeiro a fazer esta ligação entre a álgebra e a geometria (Geometria Analítica) foi René Descartes.

Os números racionais e irracionais se diferenciam na sua representação decimal. Números racionais tem repetição de decimais, ou seja, a partir de algum ponto o decimal consiste completamente de zeros ou uma cadeia finita fixada de dígitos, que vai ser repetida ($\frac{1}{2} = 0.5000...$, $\frac{3}{11} = 0.272727...$). Os números irracionais são representados por decimais que não são repetidos. Exemplos de números irracionais são:

$\pi = 3,14159265358979323846\ldots$,

$e = 2,718281828459\ldots$.

Notem que estes dois exemplos de números irracionais tem retizências no final, e isto significa que seu número de casas decimais é infinito sem nenhum padrão ou repetição. Consequentemente, é impossível representar um número irracional de forma exata num número finito de páginas. Porém, todo número irracional pode ser representado de forma exata como o limite de uma sequência de números racionais. Por este motivo aos principais números irracionais têm se atribuído letras. O conceito de limite será estudado nos próximos tópicos.

Os números reais tem as seguintes propriedades para a adição e a multiplicação. Sejam a, b e c números reais, então:

i) a adição é comutativa e associativa, $a + b = b + a$ e $a + (b + c) = (a + b) + c$.

ii) a multiplicação é comutativa, associativa e distributiva com respeito a adição, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$ e $a(b + c) = ab + ac$.

Os números reais são ordenados, isto é, dado dois números a e b, só se verifica uma das seguintes possibilidades:

i) a é menor que b ($a < b$),
ii) b é menor que a ($a > b$),
iii) a é igual a b ($a = b$).

Esta relação de ordem é representada com o simbolo $<$, que estabelece desigualdades.

Definição 2 *Se a e b são números reais, então:*
i) $a < b$ significa que $b - a$ é positivo
ii) $a \leqslant b$ significa que $a < b$ ou $a = b$.

Geometricamente falando, se $a < b < c$, significa que na linha reta, b esta a direita de a e c à direita de b. Veja esta representação geométrica na Figura 2.

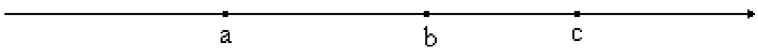


Figure 2: Representação gráfica dos números reais $\mathbb{R}$.

A seguir colocamos um teorema que contem as propriedades mais usadas da desigualdade. Estas propriedades serão usadas mais a frente para resolver inequações.

Teorema 1 *Sejam a, b, c e d números reais.*
a) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
b) Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$
c) Se $a < b$, então $ac < bc$ quando c é positivo e $ac > bc$ quando c é negativo
d) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$
e) Se a e b são ambos positivos ou ambos negativos e $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Estas cinco propriedades continuam sendo validas se os simbolos $<$ e $>$ são trocados por $\leqslant$ e $\geqslant$ respetivamente.

1.1.2 - Potencias, raizes e valor absoluto. Distância.

Potencias e raizes.

Sejam n e m inteiros positivos e a um número real, semelhante ao caso dos números racionais nós temos as seguintes regras para a potência:

$a^{(m+n)} = a^m a^n$,
$(a^m)^n = a^{mn}$,
$a^{m^n} = a^{(m^n)}$. Lembrando que a expressão entre parêntesis deve ser calculada primeiro.

Seja a um número real positivo e n um inteiro positivo, então existe um único número real positivo r tal que: $r^n = a$. Este número é chamado de n-esima raiz de a e é denotado por $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$. No caso particular de $n = 2$ temos a raiz quadrada.

Valor absoluto

Duas propriedades importantes dos números reais são seu sinal e sua grandeza. Geometricamente falando o sinal esta associado à direção (direita ou esquerda) que o número se encontra da origem (número real zero) na linha reta de números reais. Sua grandeza esta associada à distância que ele se encontra da origem. Nós introduzimos o conceito de valor absoluto para caraterizar esta distância.

Definição 3 *O valor absoluto ou grandeza de um número real a é denotado por* $|a|$ *e definido como* $|a| = \begin{cases} a & se\ a \geqslant 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$.

Note que da definição anterior segue que $|a| \geqslant 0$ para todos os valores de a. O valor absoluto pode ser expressado em termos do símbolo da raiz quadrada.

Teorema 2 *Para todo número real a,* $\sqrt{a^2} = |a|$.

Prova: Como $a^2 = (+a)^2 = (-a)^2$ os números $+a$ e $-a$ são raizes quadradas de a^2. Se $a \geqslant 0$, então $+a$ é a raiz quadrada de a^2, e se $a < 0$, então $-a$ é a raiz quadrada não negativa de a^2. Como $\sqrt{a^2}$ denota a raiz quadrada não negativa de a^2, nós temos
$\sqrt{a^2} = +a$ se $a \geqslant 0$,
$\sqrt{a^2} = -a$ se $a < 0$,
que nada mais é que a definição do valor absoluto. Portanto $\sqrt{a^2} = |a|$.$\square$
Este quadradrinho branco no final da demostração é usado para indicar que a prova foi concluída. Outras propriedades do valor absoluto.

Teorema 3 *Se a e b são números reais, então:*
a) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$,
b) $|ab| = |a||b|$
c) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

Prova: a) Se $a \geqslant 0$, então nós podemos escrever $-a \leqslant a \leqslant a$ e $a = |a|$ de onde segue que $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. Se $a < 0$, nós podemos escrever $a \leqslant a \leqslant -a$ e $-a = |a|$ de onde segue que $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.$\square$
b) Como $\sqrt{a^2} = |a|$ isto implica que $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$.$\square$

Conceito de distância

A distância entre dois pontos (ou dois números reais) é um número real que satisfaz as seguintes propriedades:
i) para quaisquer pontos P e Q, nós temos $d(P, Q) \geqslant 0$, e $d(P, Q) = 0$ se e somente se $P = Q$,
ii) para quaisquer pontos P e Q, nós temos $d(P, Q) = d(Q, P)$,
iii) sejam P, Q e M três pontos, então $d(P, M) \leqslant d(P, Q) + d(Q, M)$.

Figure 3: Distância entre dois números reais.

Por definição a distância entre dois pontos de uma linha reta (ou dois números reais) é: $d = b - a$, se $b > a$ ou $d = a - b$, se $a > b$. No primeiro caso, $b - a$ é positivo, portanto podemos escrever $d = b - a = |b - a|$. No segundo caso, $b - a$ é negativo, portanto podemos escrever $d = a - b = -(b - a) = |b - a|$. Note que esta definição de distância satisfaz as três propriedades anteriormente colocadas.

Teorema 4 *Se a e b são pontos de uma linha coordenada, então a distância entre eles é* $d = |b - a|$.

Teorema 5 *Para todo número real x e todo número positivo K:*
a) $|x| < K$ *se e somente se* $-K < x < K$,
b) $|x| > K$ *se e somente se* $x < -K$ *ou* $x > K$.

O teorema anterior continua sendo valido se nós trocamos $<$ por $\leqslant$.

Teorema 6 ***(Desigualdade Triangular)*** *Para qualesquer números reais a e b temos* $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Prova: De teoremas anteriores temos que $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ e $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Sumando estas duas desigualdades segue que $-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|)$. Usando o item a) do teorema anterior com $\leqslant$ no lugar de $<$, e escolhendo $x = a + b$ e $K = |a| + |b|$ obtemos $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.$\square$

1.2 - Noções sobre conjunto, intervalos e expressões lógicas.

Conjuntos.

Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados de elementos ou membros do conjunto. Um caso particular de conjunto é aquele cujos elementos são números reais. A notação usada para descrever um conjunto é: $\{x\ :\ \_\_\_\_\}$ e lee-se como, "o conjunto de todos os x, tal que _______ ". Onde x denota os elementos do conjunto e ______ denota uma propriedade específica dos elementos deste conjunto. Além de : que corresponde a "tal que" são usados outros símbolos como / ou ;. Esta escolha de notação pode ser diferente em livros e artigos científicos e definem a notação usada pelos autores.

Exemplo: $\{x\ :\ x$ é racional$\}$ o conjunto de todos os x, tal que x é um número racional.

Notação de conjunto: Para indicar que um elemento a é membro do conjunto A escrevemos $a \in A$ e lee-se "a é um elemento de A" ou "a pertence a A". Para indicar que a não é um elemento de A escrevemos $a \notin A$ e lee-se "a não é um elemento de A" ou "a não pertence a A".

Exemplo: Se A é o conjunto $\{x :\ x$é racional$\}$, então os números $\frac{3}{4} \in A$ e $\sqrt{2} \notin A$.

Algumas vezes quando definimos um conjunto usa-se a notação $\{x \in A\ :\ \_\_\_\_\}$ que especifica a que conjunto A pertencem os elementos x. Exemplo: $\{x \in R\}$ é o conjunto de todos os elementos x que pertencem aos números reais (R é usado para denotar o conjunto dos números reais).

Existem conjuntos que não tem elementos nenhum. Tal conjunto é denotado pelo símbolo $\varnothing$ e chamado de vazio ou nulo. Um exemplo de conjunto vazio é $\left\{x \in R\ :\ x^2 < 0\right\}$.

Definição 4 *Dois conjuntos A e B são ditos ser iguais se eles possuem os mesmos elementos, e se denota $A = B$. Caso contrario são dito ser diferentes, $A \neq B$.*

Exemplo: $\left\{x \in R : x^2 < 0\right\} = \varnothing$.

Definição 5 *Se todo elemento do conjunto A é também um elemento do conjunto B, nós dizemos que A é um subconjunto de B ou que A esta contido em B, e escreve-se $A \subset B$.*

Por convenção o conjunto $\varnothing$ é um subconjunto de todo conjunto. Pela definição acima, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Definição 6 *Sejam A e B dois conjuntos:*

a) o conjunto de todos os elementos que pertence a A e também a B é chamado de interseção de A e B e denota-se $A \cap B$, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$,

b) o conjunto de todos os elementos que pertence a A ou a B é chamado de união de A e B e denota-se $A \cup B$, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

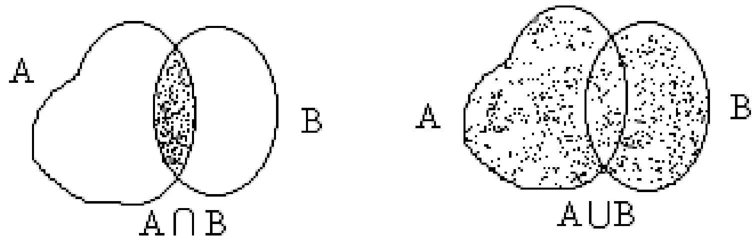


Figure 4: Interseção e união de conjuntos.

Existe outra relação entre conjunto que se chama complemento. O complemento do conjunto A relativo ao conjunto S, denotado por $S - A$, é o conjunto de elementos que estão em S e não estão em A, ou seja $S - A = \{x : x \in S \text{ e } x \notin A\}$.

Definição 7 *Se S é um conjunto de números reais diferente de vazio, e se existe um número M, tal que $x \leqslant M$ pata todo $x \in S$, se diz que o conjunto S é limitado por cima (Se $S \neq \varnothing$ e $S = \{x \in R : x \leqslant M\}$, se diz S é limitado por cima).*

Similarmente se $S \neq \varnothing$ e $S = \{x \in R : M \leqslant x\}$, então S é limitado por baixo.

Um conjunto S é dito ser limitado, se é limitado por cima e por baixo, caso contrario se diz que é ilimitado.

Exemplo de conjunto limitado: $\{x \ : \ 2 < x < 3\}$ o conjunto de todos os x, tal que x está entre 2 e 3.

O valor absoluto proporciona uma forma alternativa de definir um conjunto limitado de números reais.

O conjunto S é limitado se existe um número positivo K tal que $|x| \leqslant K$ para todo $x \in S$. Neste caso K é o limite superior e $-K$ é o limite inferior para S.

Intervalos.

Um caso especial de conjunto de números reais são os chamados intervalos.

O intervalo fechado entre os números a e b, $a < b$, é o conjunto $\{x \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$

Figure 5: Representação geométrica do intervalo fechado.

O intervalo aberto entre os números a e b, $a < b$, é o conjunto $\{x \ : \ a < x < b\}$

Geometricamente, um intervalo é o conjunto dos pontos de um segmento de linha que inclui os dois pontos extremos (a e b) quando é fechado e não inclui os pontos extremos

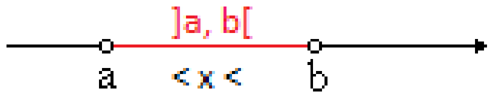


Figure 6: Representação geométrica do intervalo aberto.

quando é aberto. Os símbolos usados para denotar os intervalos são $[a, b]$ para intervalos fechados e (a, b) para abertos. Um intervalo pode incluir apenas um ponto extremo. Neste caso se chamam de intervalos semiaberto ou semifechado ($[a, b)$ e $(a, b]$ que por definição são $\{x \ : \ a \leqslant x < b\}$ e $\{x \ : \ a < x \leqslant b\}$ respetivamente). A seguir listamos os possiveis intervalos que podem existir para o conjunto dos números reais.

Notação de intervalo	Notação de conjunto
$[a, b]$	$\{x \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$
(a, b)	$\{x \ : \ a < x < b\}$
$[a, b)$	$\{x \ : \ a \leqslant x < b\}$
$(a, b]$	$\{x \ : \ a < x \leqslant b\}$
$(-\infty, b]$	$\{x \ : \ x \leqslant b\}$
$(-\infty, b)$	$\{x \ : \ x < b\}$
$[a, +\infty)$	$\{x \ : \ x \geqslant a\}$
$(a, +\infty)$	$\{x \ : \ x > a\}$
$(-\infty, +\infty)$	$\{x \ : \ -\infty \leqslant x \leqslant +\infty,$ ou então x é um número real$\}$

O simbolo ∞ é chamado de infinito e representa um número que pode ser arbitrariamente grande.

Expresões lógicas

Em matemática sempre deve-se deixar claro o que está sendo assumido e o que esta sendo provado. Por prova nós entendemos uma sequência de sentenças (afirmações) onde cada uma destas sentenças é assumida ou decorre de afirmações anteriores através de uma regra de dedução, a qual também é assumida. Regras de dedução são básicamente regras do senso comum. As Definições, Postulados e Axiomas não podem ser provados. Os Teoremas, Lemas e Corolários devem ser provados.

A sentença ou expressão lógica "se A, então B" é usada quando a afirmação A implica na B. Esta expressão lógica também pode ser representada de forma compacta como "B somente se A".

Exemplo: "Se $2x = 5$, então $x = \frac{5}{2}$" é uma sentença verdadeira.

A sentença reciproca de "se A, então B" é dada por "se B, então A".

Exemplo: "Se $x = \frac{5}{2}$, então $2x = 5$" (reciproca) é verdadeira.

Quando uma sentença e sua reciproca são verdadeira acostuma-se usar a terminologia "A se e somente se B". Assim, isto significa que A implica em B, e que B implica em A.

Português	Inglês	Significado	Símbolo
"A somente se B"	"A only if B"	se B, então A	$\Longrightarrow$
"A se e somente se B"	"A if and only if B"	se A, então B e se B, então A	$\Longleftrightarrow$

Exemplo: "Se $x = -3$, então $x^2 = 9$" é uma sentença verdadeira. A reciproca: "se $x^2 = 9$, então $x = -3$" é uma sentença falsa, porque x pode ser igual a 3. Portanto a sentença "$x^2 = 9$ se e somente se $x = -3$" é falsa.

Frequentemente, para provar uma determinada sentença nós usamos o chamado "método da contradição". Nós queremos provar que uma sentença A é verdadeira. Para fazer isto, nós supomos que A é falso, e então via raciocínio lógico partindo de que A é falso chegamos a um absurdo ou a uma contradição de uma sentença verdadeira. Nós concluimos então que nossa suposição que "A é falso" não se verifica, de onde segue que A deve ser verdadeira.

Exemplo: **Teorema:** Seja $n \in \mathbb{N}$. Se 2 divide n^2, então 2 divide n.

Prova: (Por contradição ou redução ao absurdo)

Vamos supor verdadeiro o contrario do teorema. Ou seja, suponha que 2 divide n^2 e que não divide n. Logo, existem números naturais k e m tais que:

$$n^2 = 2k \text{ (divisivel por 2)},$$

$$n = 2m + 1 \text{(não divisivel por 2)}.$$

Mas, subtituindo (2) em (1) segue que:

$$(2m+1)^2 = 2k \quad \Rightarrow \quad 4m^2 + 4m + 1 = 2k \;\text{ ou }\; 4(m^2 + m) = 2k - 1,$$

que é contraditorio, já que $2k - 1$ é um número impar e portando não é divisivel por 4 enquanto que $4(m^2 + m)$ é divisivel por 4. Este absurdo ou contradição obtida prova a falsidade da hipótese. Logo, se 2 divide n^2, também divide n.

Noções sobre sucessões ou sequências e séries.

O método da indução matemática.

Indução é um axioma que nos permite provar que ciertas propriedades são verdadeiras para todos os inteiros. Suponha que temos que provar certa afirmação relativa aos inteiros positivos n. A afirmação é denotada por $A(n)$. Provar a afirmação para todo n, basta provar o seguinte:

1) $A(1)$ é verdadeiro (a afirmação relativa ao inteiro 1 é verdadeira).

2) Assumindo a afirmação provada para todos os inteiros positivos $\leqslant n$, prove para $n+1$, ou seja, prove que $A(n+1)$ é verdadeira.

A combinação destes dois passos é conhecida como indução. Ou seja, 1) fornece o ponto de partida, e 2) nós permite provar $A(2)$ partendo de $A(1)$, e $A(3)$ partendo de $A(2)$, e assim sucessivamente, procedendo passo a passo.

Exemplo: **Teorema:** Para todos os inteiros $n \geqslant 1$, temos $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Prova: Por indução. A afirmação $A(n)$ é a afirmação do teorema. Quando $n = 1$, simplemente temos que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, que é verdadeiro. Assuma agora que a afirmação é verdadeira para o enterio n, $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Então

$A(n+1) = 1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ou seja, assumindo $A(n)$ provamos que $A(n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, que nada mais é que $A(n+1)$. Então isto prova o resultado.

Notação. Podemos denotar a soma de n (n é um inteiro) termos pelo seguinte símbolo $1 + 2 + 3 + ... + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$. Similarmente, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

Exemplo: Nós queremos uma formula simple para o número de maneiras de retirar k objetos de um conjunto de n objetos. Este número é denotado por C_k^n e é chamado de coeficiente binomial. A razão para este nome é simples. Suponha que queremos expandir o produto $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ como uma soma de termos que envolvem potências de x e y. Nesta expansão, selecionamos x de k fatores e y de $n-k$ fatores. Tomando a soma sobre todos as possiveis seleções, temos que $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}$. Se mostra que C_k^n tem uma expressão simples. Nós denotamos com $n!$ o produto dos n primeiros inteiros positivos, como:

$1! = 1$,

$2! = 1 \cdot 2 = 2$,

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,

e assim sucessivamente. Por definição $0! = 1$. Então o valor para C_k^n é dada pela formula $C_k^n = \frac{n!}{k(n-k)!}$. Por exemplo, $C_2^4 = \frac{4!}{2(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$. Se pode provar por indução que C_k^n tem o valor descrito acima.

Também, é usada outra notação para o coeficiente binomial $C_k^n = \binom{n}{k}$. Por definição, se n é um inteiro $\geqslant 0$ e k é um inteiro tal que $k < 0$ ou $k > n$, então $\binom{n}{k} = 0$.

Séries Geométricas

Seja c um número, $c \neq 1$, e sejam k e n inteiros positivos. Considere a soma $\sum\limits_{k=0}^{n} c^k = 1 + c + c^2 + ... + c^n$. Observe que $(1 + c + c^2 + ... + c^n)(1 - c) = 1 - c^{n+1}$. Isto é conseqüência imediata da propriedade distributiva. Todos os termos no produto se cancelam exceto $1 - c^{n+1}$. Com isto temos que $\sum\limits_{k=0}^{n} c^k = \frac{1}{1-c} - \frac{c^{n+1}}{1-c}$.

Que acontece quando n é muito grande? Se $c > 1$, então a potência c^{n+1} será muito grande. Um caso interessante é quando $0 < c < 1$. Então c^{n+1} se aproxima de 0. Consequentemente $\frac{c^{n+1}}{1-c}$ se aproxima de 0 quando n é arbitrariamente grande. Então podemos dizer que a soma $1 + c + c^2 + ... + c^n$ se aproxima de $\frac{1}{1-c}$ quando n é arbitrariamente grande. E isto pode ser abreviado pelo símbolo $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$. O símbolo ∞ é chamado de infinito, e representa um número que pode ser arbitrariamente grande. Cuidado, não existe um número chamado infinito. A palavra infinito apenas é uma abreviação para dizer que um número pode ser arbitrariamente grande. O símbolo $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c^k$ é chamado de serie geométrica, e lhe corresponde o valor numérico $\frac{1}{1-c}$ quando $0 < c < 1$.

1.3 - Equações e inequações que contem uma quantidade real.

Exemplo 1: Resolva a equação $2x + 3 = 1$.

Usando as propriedades da soma e multiplicação para os números reais podemos chegar a:

$x = -\frac{2}{2} = -1$, que é a solução do nosso problema.

Prova: Subtitua $x = -1$ na equação e obteremos uma identidade. Para provar que é única, assuma que existe ($\exists$) outra solução $x_2 = -1 + b$, subtituindo na equação chegamos a que $b = 0$.$\square$

Exemplo 2: Resolva a seguinte inequação $2x - 3 < 7$. Ou seja, encontre todos os números reais que satisfazem esta desigualdade.

$2x - 3 < 7$ usando as propriedades da soma e multiplicação para os números reais temos

$2x \quad < 10 \quad (+3$ a ambos lados)

$x \quad < 5 \quad (*\frac{1}{2}$ ambos lados).

Até este ponto nós estamos tentados a concluir que a solução de nosso problema consiste de todos os x menores que 5, isto é, todos os x que pertezem ao intervalo $(-\infty, 5)$. Dizer que esta conclusão é correta é prematuro. Por que? Porque logicamente nós temos provado que se x é a solução, então $x < 5$. Em outras palavras, se S denota o conjunto de soluções de nossa desigualdade, nós mostramos que $S \subset (-\infty, 5)$. Ainda não obtimos que $S = (-\infty, 5)$. Se nós provamos que $(-\infty, 5) \subset S$, então poderemos dizer que $S = (-\infty, 5)$, dado que a definição de igualdade de conjunto é $A = B$ se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Para provar que $(-\infty, 5) \subset S$ nós devemos mostrar que todo número $x \in (-\infty, 5)$ é também um elemento de S. Isto é, nós devemos assumir $x < 5$ e deduzir que $2x - 3 < 7$. Isto pode ser feito da seguinte forma.

$x \quad < 5$

$2x \quad < 10 \quad (*2$ ambos lados)

$2x - 3 < 7 \quad$ usando as propriedades da soma e multiplicação para os números reais temos

$2x \quad < 10 \quad$ (-3 a ambos lados), e com isto provamos que a solução de $2x - 3 < 7$ é o intervalo $(-\infty, 5)$.

Note que neste exemplo os passos para mostrar as duas partes do problema são os mesmos, mais em ordens opostas. É muito comum so fazer os passos de uma das etapas (partes) e então concluir a prova estabelezenco que os passos são reversiveis.

Exemplo 3: Resolva a equação $|2x - 4| = |3 - x|$.

No intervalo $[2, 3]$ ambos $(2x - 4)$ e $(3 - x)$ são não negativos, por isto a equação se reduce a:

$2x - 4 = 3 - x$, com a solução $x = \frac{7}{3}$. Por outro lado, nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(3, \infty)$, $(2x - 4)$ ou $(3 - x)$ podem ser negativos, mas não simultaneamente:

$-(2x - 4) = (3 - x)$ em $(-\infty, 2)$

$(2x - 4) = -(3 - x)$ em $(3, \infty)$. Como pode-se ver são as mesma equação para os dois intervalos e sua solução é $x = 1$. Assim, $x = 1$ e $x = \frac{7}{3}$ são a solução do problema.

Equação quadratica para uma quantidade real.

Nós sabemos resolver $3x - 2 = 0$. Nas equações deste tipo a quantidade x ($x \in R$) aparece so na primeira potencia. Agora vamos considerar um caso mais complexo, onde x aparece com a segunda potencia. Como por exemplo $x^2 - 3x + 1 = 0$. Resolver este problema é encontrar todos os valores de x que satisfazem esta equação. Primeiro sumamos -1 a ambos lados da equação:

$$x^2 - 3x = -1, \tag{1}$$

Agora devemos adicionar outro número a ambos lados da equação de forma tal que o lado esquerdo da equação seja um quadrado da forma $(x - s)^2$. Nós sabemos que

$$(x - s)^2 = x^2 - 2sx + s^2, \tag{2}$$

portanto $-2s = -3$ ou $2s = 3$ ou $s = \frac{3}{2}$. Então somando $(\frac{3}{2})^2$ a cada lado da equação (1) encontramos,

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}, \tag{3}$$

o lado esquerdo pode ser escrito na forma da equação (2)

$x^2-3x+\frac{9}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$ e de (3) segue que $(x-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$. Agora, tomando a raiz quadrada temos

$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$ ou $|x-\frac{3}{2}|=\sqrt{\frac{5}{4}}$ que segundo a definição do valor absoluto possue duas soluções

$+(x-\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{5}{4}}$ se $(x-\frac{3}{2})\geqslant 0$ que implica em $x=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$,

$-(x-\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{5}{4}}$ se $(x-\frac{3}{2})<0$ que implica em $x=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$,

que muitas vezes se escreve abreviadamente como $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$.

Exemplo: Resolva $x^2+2x+2=0$. Aplicando o mesmo método obtemos, $x^2+2x=-2$. Desta vez $s=1$ e portanto $(x-1)^2=-2+1=-1$, mais um número real negativo não pode ser o quadrado de um número real. Portanto este problema não tem solução.

Teorema 7 *Sejam a, b e c números reais e $a\neq 0$. As soluções da equação quadratica $ax^2+bx+c=0$ são os números reais x_1 e x_2 dados pela formula $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, sempre que b^2-4ac seja positivo ou zero. Se b^2-4ac é negativo, então a equação não tem solução no conjunto dos números reais.*

Prova: Resolver nossa equação é o mesmo que resolver $ax^2+bx=-c$. Como $a\neq 0$, dividindo por a podemos ver que isto é equivalente a resolver $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$. Para completar o quadrado do lado esquerdo, necesitamos que $x^2+\frac{b}{a}x=x^2+2sx$ e portanto $s=\frac{b}{2a}$. Agora adicionando $s^2=\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos lados da equação, encontramos a equação equivalente $(x+\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Se b^2-4ac é negativo, então o lado direito é negativo, e um número negativo não pode ser o quadrado de um número real. Por isto, neste caso, nossa equação não tem solução para os números reais. Se b^2-4ac é positivo ou zero, então podemos tomar a raiz quadrada e encontrar $|x+\frac{b}{2a}|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que implica em $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.$\square$

Note que se $b^2-4ac=0$, então nossas duas soluções correspondem na verdade a so uma $x=-\frac{b}{2a}$. Note também que, na nossa prova apenas utilizamos as operações de soma , multiplicação e a raiz quadrada para os números reais. Se nós novamente extendemos nossos conhecimentos dos números para um sistema maior de números, nos quais estas operações sejam validas, inclusive a possibilidade de tomar a raiz quadrada de um número real negativo, então nossa formula será valida para este novo sistema maior de números, e novamente teremos solução para nossa equação em todos os casos (números complexos).

Equações do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$ e $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ tem formulas para as raizes. Para polinomios de ordem maior a 4 não existem formulas e o problema é resolvido de forma aproximada utilizando métodos numéricos.

1.4 - Relações entre mais de uma variavel (Duas dimensões).

Conceito de variavél e relação.

Bom, até aqui temos visto como se formaram os números reais e as operações basicas foram definidas para eles. Vimos que existe uma correspondência um a um entre os números reais e os pontos de uma linha reta. Aprendimos a resolver equações e inequações com uma incognita. Agora vamos ver que todos estes conceitos podem ser extendidos (generalizados) para um caso mais geral em que podemos ter equações (inequações) com mais de uma incognita.

Variavel: Por uma variavel entendemos um símbolo que pode ser igual a qualquer conjunto particular de números. Ou seja, uma variavel é denotada por um símbolo que representa um elemento genérico de um conjunto.

Usualmente o conjunto é o conjunto dos números reais R^1 (que é o mesmo que R) ou algum subconjunto deste e o símbolo é x (exemplo $2x - 3 = 1$).

Frequentemente encontramos problemas com mais de uma variavel, ou seja, mais de uma quantidade que se relacionam entre elas de alguma forma, como por exemplo a seguinte equação: $2x + y = 1$, onde x e y são os dois símbolos que denotam duas variaveis, $x \in R^1$ e $y \in R^1$,ou seja, são duas variaveis reais. Resolver este problema consiste em encontrar os valors de x e y que satisfazem a equação.

Relações entre variaveis podem ser dos mais variados tipos e algumas vezes são extremadamente complicadas. Por enquanto vamos trabalhar com relações entre duas variaveis, como por exemplo: $y + 2x = 3$ e $y + 2x \geqslant 3$, onde x e y são duas variaveis reais que pertezem a dois conjuntos respetivamente. Isto é, x e y são dois (um par) números reais genéricos que pertezem a dois conjuntos X e Y e estes números se relacionam atravéz das expressões acima. Algumos pares de números de x e y satisfazem a relação (solução), outros não.

Destacamos tres tipos de relações que são frequentemente usadas.

1) **Equivalencia**: Uma relação $\sim$ em X é chamada de uma relação de Equivalencia se satisfaz tres condições:

a) para todo $x \in X$, $x \sim x$ (propriedade reflexiva);

b) se $x \sim y$, então $y \sim x$ (propriedade simetria);

c) se $x \sim y$ e $y \sim z$,então $x \sim z$ (propriedade transitiva).

Estas três condições ou propriedades são chamadas de reflexiva, simetria e transitiva. Outra notação muito usada para a relação de equivalencia é $\equiv$.

O exemplo mais simples ou canônico de ralção de equivalencia é a **Igualdade** denotada com o simbolo $=$. Note que a **Igualdade** verifica as propriedades reflexiva, simetria e transitiva.

a) para todo $x \in X$, $x = x$;

b) se $x = y$, então $y = x$;

c) se $x = y$ e $y = z$,então $x = z$.

2) **Ordem Parcial**: Uma relação $<$ em X é chamada de Ordem Parcial se satisfaz duas condições:

a) é transitiva, isto é, $x < y$ e $y < z$ implica $x < z$;

b) para todo $x \in X$, $x \not< x$.

Quando a) se verifica é facil ver que b) é equivalente a antisimetria: se $x < y$, então $y \not< x$. Uma relação $<$ em X é chamada de ordem total se ela é uma ordem parcial e satisfaz a seguinte condição: para qualquer x e y em X, se verifica que $x < y$ ou $y < x$ ou $x = y$.

3) **Função**: Uma relação f de X em Y é chamada uma Função se para cada $x \in X$ existe exatamente um $y \in Y$ tal que xfy. Outra forma de denotar uma relação do tipo função é $y = f(x)$. Nós escrevemos $f : X \to Y$ que significa que f é uma função de X em Y, X é chamado de dominio de f e o conjunto $\{f(x) : x \in X\}$ é chamado de imagem de f. Note que a imagem de f pode ser diferente do conjunto Y.

Dizemos que f é injetora (um a um) se $f(x_1) = f(x_2)$ somente quando $x_1 = x_2$, onde x_1 e x_2 são dois elementos de X.

Nós dizemos que f é sobrejetora (onto) se a imagem de f é todo o conjunto Y, ou seja, $Y = \{f(x) : x \in X\}$.

Uma função que é spbrejetora e injetora é chamada de bijetora. Uma função bijetora também é referenciada como uma correspondência um a um.

Exemplo: 1) $y = f(x) = x$, Dom $f = \{x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}\}$, Im $f = \{y \in \mathbb{R}\}$ é injetora e sobrejetora, portanto bijetora.

Exemplo: 2) $y = x^2$, Dom $f = \{x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}\}$, Im $f = \{y \in \mathbb{R}/y \geqslant 0\}$ não é injetora ($(-x_o)^2 = x_o^2$) e também não é sobrejetora ($Y \neq$Im f)

Exemplo: 3) $y^2 + x^2 = 1$ não é uma relação de função é apénas uma relação entre os conjuntos X e Y (equação)

Uma função $x : N$(naturais)$\rightarrow$ X(reais) é também chamada de uma sequência ou sucessão em X. Neste caso é mais pratico usar a notação x_n que $x(n)$. Esta talvez foi a primeira função matemática que o ser humano criou. Isto porque a ação de contar objetos é uma sequência $x(n) = n$.

Exemplo: $x = f(n) = \frac{1}{n}$ ou $x_n = \frac{1}{n}$.

O par ordenado e sua representação gráfica.

No caso que so tinhamos um conjunto, os números reais, foi estabelecido uma correspondência entre os números reais e os pontos geometricos de uma linha reta (uma variavel, uma dimensão). Esta correspondência pode ser extendida para tratar com dois conjuntos de números reais. A correspondência é estabelezida entre os números reais de cada conjunto e os pontos geometricos de um plano (duas variaveis, duas dimensões).

Assim, pontos de um plano possuem uma correspondência um a um com os pares de números reais se usamos duas linhas coordenadas perpendiculares, designamos por origem o ponto de interseção e lhe assignamos direções a cada uma das linhas. Normalmente estas duas linhas se chamam de eixos coordenados (eixo x e eixo y) e formam o que é chamado de sistema de coordenadas cartesianas ou retangular se o ângulo entre eles é de 90°.

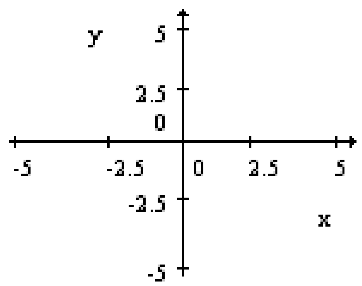


Figure 7: Representação gráfica dos eixos cartesianos.

Agora vamos estabelecer a correspondência um a um entre os pontos do plano coordenado e o par de números reais. Se P é um ponto no plano coordenado, então nós trazamos duas linhas que partem de P e cada uma é perpendicular a um dos eixos coordenados. Se a primeira linha interseta o eixo x no ponto com coordenada a e a segunda linha interseta o eixo y no ponto coordenado b, então nós associamos o par (a, b) ao ponto P.

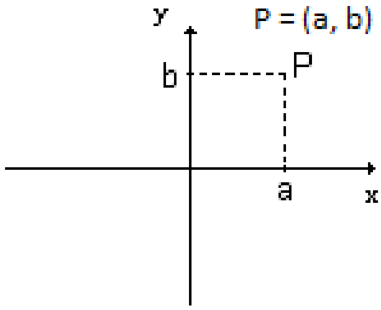


Figure 8: Representação gráfica do par ordenado ou ponto do plano.

Com esta construção, cada ponto no plano coordenado determina um único par de números. Se fazemos o processo inverso, comezando com um par de números (a, b), podemos construir linhas perpendiculares aos eixos coordenados, que partem das coordenadas a e b respetivamente e se intersetam em um único ponto que é P. Desta forma, temos estabelezido uma correspondência um a um entre um par de números reais e um ponto do plano coordenado.

Note que, semelhante ao caso unidimensional a ordem do par de números reais é importante. Os pares (a, b) e (b, a) representam pontos diferentes do plano, a menos que $a = b$. Por esta razão o par de números reais é chamado de par ordenado. O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é denotado por $\mathbb{R}^2$ e definido como $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^1 \text{ e } y \in \mathbb{R}^1\}$.

Os eixos coordenados x e y dividem o plano xy em quatro quadrantes. É facil determinar a que quadrante pertece um ponto através do sinal de suas coordenadas.

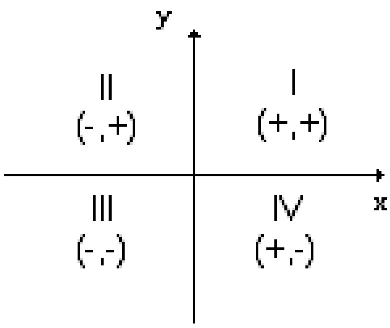


Figure 9: Os quatro quadrantes do plano: I, II, III e IV.

Operações com os pontos

A partir de agora, a menos que seja especificado, sempre trabalharemos com um sistema de coordenada definido. Assim, não faremos distinção entre um ponto e suas coordenadas associadas. Usaremos $\mathbb{R}$ para denotar o conjunto de todos os números reais, e $\mathbb{R}^2$ para denotar o conjunto de todos os pares (x, y), onde x,y são números reais. Com isto um ponto do plano é simplesmente um elemento de $\mathbb{R}^2$.

Dilatação e reflexóes

Seja P um ponto no plano, com coordenadas $P = (p_1, p_2)$. Se c é um numero real, nós definimos o produto cP como sendo o ponto $cP = (cp_1, cp_2)$.

Se c é um número positivo, nós chamamos cP de dilatação de P por c.

Nós definimos por reflexão do ponto $P = (p_1, p_2)$ com respieto ao origem ao ponto $-P = (-p_1, -p_2)$.

Se c é um número negativo, $c = -|c|$, o produto cP corresponde a reflexão do ponto P dilatado $|c|$ vezes.

Adição, subtração e a regra do paralelogramo

Sejam P_1 e P_2 dois pontos no plano, com coordenadas $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Nós definimos a soma como: $P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Esta definição satisfaz propriedades similares a adição dos números reais.

Sejam P_1, P_2 e P_3 pontos do plano:

Comutativa. $P_1 + P_2 = P_2 + P_1$.

Associativa. $P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3$.

Elemento zero. Seja $O = (0, 0)$. Então $P + O = O + P = P$.

Inversa da soma. Se $P = (p_1, p_2)$, então o ponto $-P = (-p_1, -p_2)$ é tal que $P + (-P) = O$.

Todas estas propriedades são provadas inmediatamente a partir das correspondentes propriedades dos números reais. Agora vamos interpretar geometricamente estas propriedades.

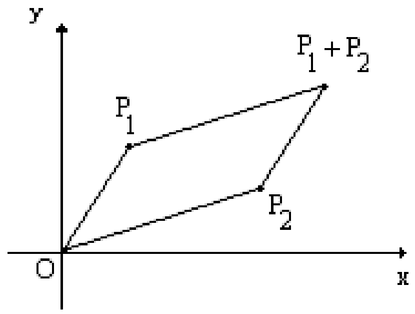


Figure 10: Regra do paralelogramo: soma de números.

Assim, podemos ver que nesta representação geométrica, o segmento de linha entre os pontos P_1 e $P_1 + P_2$ é paralelo ao segmento de linha que une os pontos O e P_2. Similarmente o segmento de linha entre os pontos O e P_1 é paralelo ao segmento de linha que une os pontos P_2 e $P_1 + P_2$. Os quatro pontos O, P_1, P_2 e $P_1 + P_2$ formam os quatro vertices do paralelogramo. Esta é a interpretação geométrica da soma.

Neste caso, os quatro pontos O, P_1, P_2 e $P_1 - P_2$ formam os quatro vertices do paralelogramo.

Seja A um elemento do R^2. Para qualquer ponto P do plano podemos definir uma translação T_A que associa a cada ponto P o ponto $P + A$.

Até aqui conseguimos definir a maioria de nossas noções intuitivas de geometria dentro de nosso sistema de coordenada, baseados unicamente nas propriedades dos números. Com isto, temos dado o que se chama de definições analiticas (definições baseadas so nas propriedades dos números) para pontos, reflexões através de O e traslações.

Agora, podemos definir o conceito de mapeamento no plano que consiste em associar a cada ponto P do plano outro ponto. Se o mapeamento é denotado por F, então este outro ponto é denotado por $F(P)$, e é chamado de valor de F no ponto P ou imagem de P para

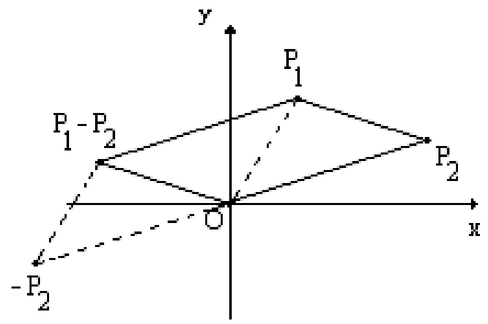


Figure 11: Regra do paralelogramo: diferença de números.

F. Por exemplo, se F é uma translação por A, isto é, se $F = T_A$, então $P + A$ é o valor de F em P.

Será que as regras que relacionam a soma e a multiplicação entre números também são validas para o caso dos pontos no plano? A resposta é afirmativa.

Associativa. Se a e b são números e P um ponto do plano, então $a(bP) = (ab)P$.

Distributiva. Se a e b são números, P_1 e P_2 pontos do plano, então $(a+b)P = aP+bP$, $a(P_1 + P_2) = aP_1 + aP_2$, $1P = P$ e $0P = O$. As provas podem ser obtidas facilmente das propriedades dos números.

Distância entre dois pontos do plano.

No caso unidimensional nós mostramos que a distância entre dois pontos a e b de uma linha reta (distância entre dois números reais) é $|a - b|$. A distância entre dois pontos no plano coordenado é calculada usando o teorema de Pitagoras.

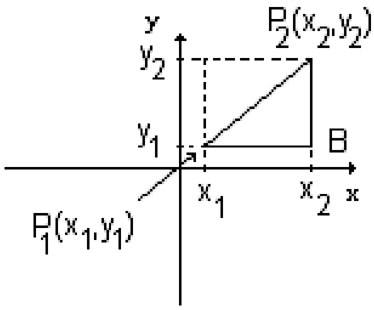


Figure 12: Distância entre dois pontos do plano.

A distância entre os pontos P_2 e B é determinada por $d_{2B} = |y_2 - y_1|$ (caso unidimensional), de forma semelhante a distância entre os pontos P_1 e B é $d_{1B} = |x_2 - x_1|$. Usando o teorema de Pitagoras: $c^2 = a^2 + b^2$, determinamos a distância entre os pontos P_1 e P_2 como

$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$, já que $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ e $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$ temos o seguinte resultado

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Note que se $(x_2 - x_1) = 0$ ou $(y_2 - y_1) = 0$, isto é, os pontos P_1 e P_2 estão numa linha paralela a um dos eixos coordenados, então $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$ ou $d =$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$, que está em corcondancia com o resultado definido para o caso de uma dimensão.

O efeito da dilatação na distância entre pontos.

Teorema. Seja c um número real. Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são pontos do plano, então $d(cP_1, cP_2) = |c|d(P_1, P_2)$.

Prova: $cP_1 = (cx_1, cy_1)$ e $cP_2 = (cx_2, cy_2)$. Pela definição de distância temos:

$d(cP_1, cP_2) = \sqrt{c^2(x_2 - x_1)^2 + c^2(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{c^2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{c^2}d(P_1, P_2) = |c|d(P_1, P_2)$.□

Por isometria entendemos um mapeamento do plano nele mesmo, que preserva a distâncias. Em outras palavras, F é uma isometria se e somente se, para qualesquer par de pontos P_1 e P_2, nós temos: $d(P_1, P_2) = d(F(P_1), F(P_2))$.

Agora vamos usar um símbolo especial para a distância entre um ponto $P = (x, y)$ e a origem O, $d(P, O) = |P| = \sqrt{x^2 + y^2}$. O número positivo $|P|$ (também $||P||$ de forma mais geral) é chamado de norma de P, e generaliza o conceito de valor absoluto dos números. Geometricamente a norma corresponde ao comprimento do segmento de linha entre os pontos O e P.

Usando as propriedades da soma e subtração de pontos, podemos expressar a distância entre dois pontos P_1 e P_2 por, $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = ||P_1 - P_2|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = ||P_2 - P_1||$. Também pode ser verificado que $||cP|| = |c|||P||$, onde c é um número real e P é um ponto do plano.

Relações e seus gráficos

Dada uma relação (exemplo $6x - 4y = 10$) nós definimos como solução da relação ao par ordenado de números reais (a, b), tal que a relação é satisfeita quando $x = a$ e $y = b$. O conjunto de todos os pares ordenados que satisfazem a relação é chamado de conjunto solução e constitue o gráfico da relação (curva ou curva plana) no plano coordenado. Aqui surgem duas possibilidades.

1) Dada uma relação entre duas variaveis x e y, construir seu gráfico no plano xy.

Exemplo: $y = x$ tem como gráfico:

2) Dada uma descripção geométrica de um conjunto de pontos no plano xy, encontrar uma expressão analitica para a relação cujo gráfico é determinado pelo conjunto de pontos dados.

Exemplo: O conjunto de pontos que equidistam do ponto $(1, 1)$ uma distância igual a 1 define uma circunferencia de raio 1 e centro em $(1, 1)$. A relação que se estabelece entre as coordenadas de cada ponto da circunferencia pode ser obtida como:

$d = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = 1$, como $(x_o, y_o) = (1, 1)$ segue que $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = 1$.

Equações que tem a forma $ax + by = c$.

Uma equação do tipo $ax + by = c$ geometricamente é uma linha reta no plano xy. Por esta razão estas equações são chamadas de equações lineares. Reciprocamente, qualquer linha reta no plano pode ser representada por uma equação na qual as variaveis x e y aparecem com a primeira potencia e sem o produto cruzado entre elas, ou seja, $ax + by = c$ ou $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ se $b \neq 0$.

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos e $x_1 \neq x_2$, podemos definir a inclinação m do segmento de linha que une os ois pontos como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Uma linha reta tem a propriedade que as inclinações de todos os segmentos de linha que conetam pontos que estão na linha são os mesmos. Este número é chamado de inclinação

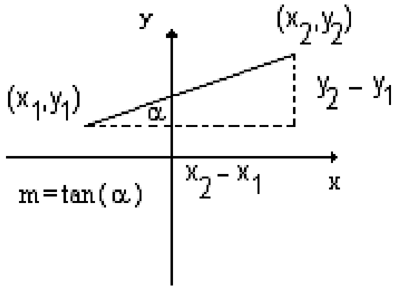


Figure 13: Representação geométrica da relação $ax + by = c$.

da linha reta. A inclinação é a razão dos cambios de coordenadas y e x. Também pode ser entendido como a tangente do ângulo entre a linha e o eixo positivo x. A inclinação é positiva se os valores de y crescem quando os valores de x crescem, e é negativa se os valores de y decrescem quando os valores de x crescem. Uma linha paralela ao eixo x tem inclinação zero e paralela ao eixo y não tem inclinação definida (se diz que tem inclinação infinita).

Teorema 8 *Duas linhas não verticais (inclinação indefinida) são paralelas se e somente se elas tem a mesma inclinação.*

Prova: Se L_1 e L_2 são linhas não verticais, então seus ângulos de inclinação α_1 e α_2 são iguais, já que duas linhas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais. Assim, $m_1 = \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = m_2$.

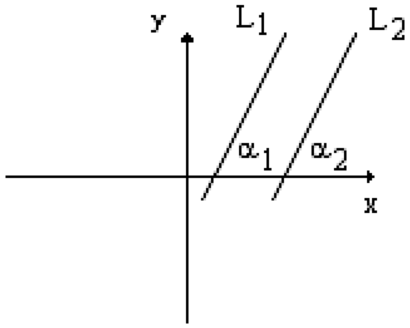


Figure 14: Representação gráfica de duas retas paralelas.

Reciprocamente, se L_1 e L_2 tem a mesma inclinação m, então $m = \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$. Como $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \pi$ segue que α_1 e α_2 são iguais. Portanto, L_1 e L_2 são paralelas.$\square$

Teorema 9 *Duas linhas não verticais são perpendiculares se e somente se o produto de suas inclinações é -1. Isto é, linhas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$ ou $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.*

Prova: Primeiro provamos que se L_1 e L_2 são linhas não verticais perpendiculares, então se verifica $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Assuma que L_1 e L_2 tem ângulos de inclinação α_1 e α_2

e que $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$. Assim, $m_2 = \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha_1+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha_1+\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\alpha_1)\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha_1)\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha_1)\cos(\frac{\pi}{2})-\sin(\alpha_1)\sin(\frac{\pi}{2})} = -\frac{\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} = -\frac{1}{\frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)}} = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$.

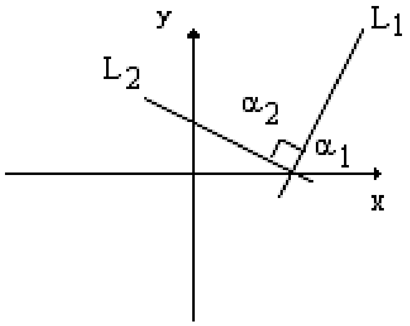


Figure 15: Representação gráfica de duas retas perpendiculares.

A outra parte da prova fica de exercicio.□

Geometricamente uma linha reta é determinada se é conhecida sua inclinação e um ponto da linha.

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, $\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$, $\qquad y = mx + \underbrace{y_1 - mx_1}_{b}$,

onde b é a interceção com o eixo y, ou seja, o ponto $x = 0$, $y = b$.

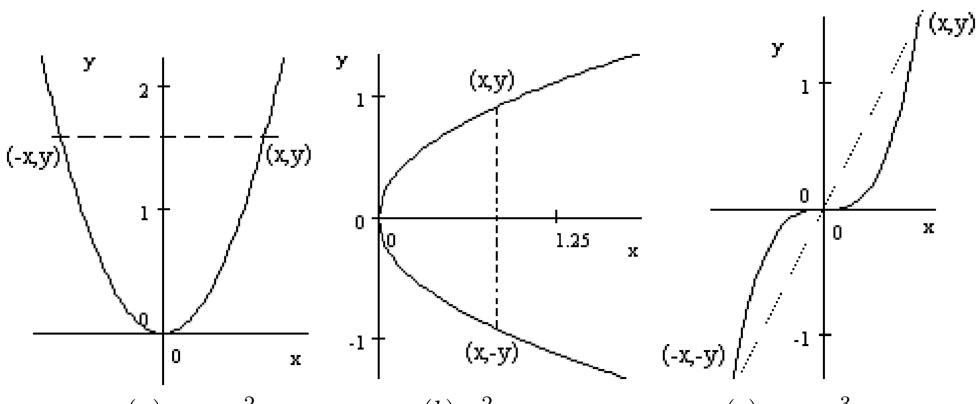
Simetrias e intercepções no plano

Simetria:

a) Uma curva plana é simetrica com respeito ao eixo y se subtituindo x por $-x$ na equação da curva obtemos uma equação equivalente.

b) Uma curva plana é simetrica com respeito ao eixo x se subtituindo y por $-y$ na equação da curva obtemos uma equação equivalente.

c) Uma curva plana é simetrica com respeito ao origem se subtituindo x por $-x$ e y por $-y$ na equação da curva obtemos uma equação equivalente.



(a) $y = x^2$ (b) $y^2 = x$ (c) $y = x^3$

Figure 16: Representação gráfica de simetrias.

Interseções:

Os pontos onde um gráfico interseta os eixos coordenados são chamados de interseções, são de especial interese em muitos problemas.

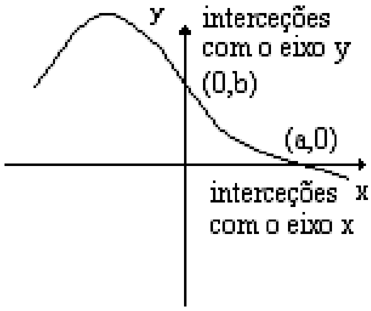
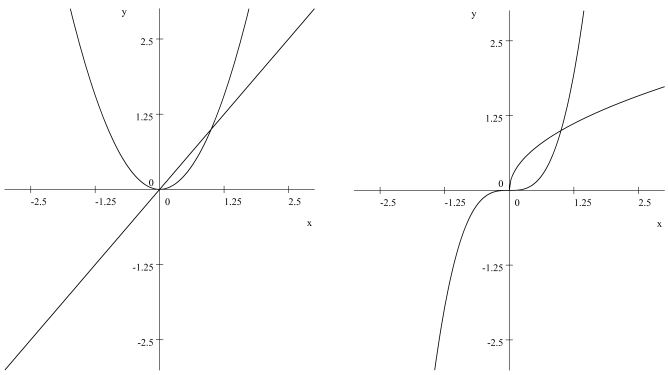


Figure 17: Representação gráfica de interseções.

Alguns gráficos de equações:

Considere o gráfico da equação $y = x^2$. Neste caso para qualquer valor de x o valor de y é sempre positivo. Além disto, o gráfico é simetrico com respeito ao eixo y, $(-x)^2 = x^2$. Suponha agora que nós queremos o gráfico da equação $y = (x-a)^2$. Se fazemos $\overline{x} = x - a$, então $y = \overline{x}^2$ e vemos que nosso gráfico é o mesmo que $y = x^2$ com a origem trasladada para o ponto $(a, 0)$. Nós podemos realizar uma translação em y. Considere o ponto (a, b) e faça $\overline{x} = x - a$ e $\overline{y} = y - b$, assim quando $x = a$, $\overline{x} = 0$ e quando $y = b$, $\overline{y} = 0$. Então $\overline{y} = \overline{x}^2$ tem o mesmo gráfico que a equação $y = x^2$ trasladado ao ponto (a, b). Note que a equação $\overline{y} = \overline{x}^2$ é a mesma que a equação $(y-b) = (x-a)^2$ em termos das coordenadas (x, y). Uma curva que possue uma equação do tipo $(y-b) = c(x-a)^2$ em algum sistema de coordenada é chamada de parabola. Ou seja, a equação da forma $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ é chamada de equação quadratica em x. Seu gráfico é a curva chamada de parabola. Se $a > 0$, a parabola é aberta para cima, e se $a < 0$ a parabola é aberta para abaixo. Nós dois casos a parabola é simetrica com respeito a uma linha vertical paralela ao eixo y. Esta linha corta a parabola num ponto chamado vertice.



(a) $y = x$ e $y = x^2$ (b) $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$

Figure 18: Representação gráfica de três funções.

Circulos: Um circulo é definido como o conjunto de todos os pontos no plano cuja distância ao ponto (x_0, y_0) é a mesma r (radio). Assim, o ponto estará no circulo se e somente se $d = r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ou equvalentemente $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$. Esta é a relação que satisfazem os pontos de um circulo centrado no ponto (x_0, y_0) e radio r.

Duas Equações do tipo $\mathbf{ax + by = c}$

Já sabemos que uma equação do tipo $ax + by = c$ geometricamente corresponde a uma linha reta no plano xy. Por esta razão estas equações são chamadas de equações lineares. Agora resolveremos um problema com duas equações deste tipo.

$$2x + y = 1 \tag{1}$$

$$3x - 2y = 4 \tag{2}$$

Resolver este problema é encontrar os valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas equações. Nós faremos esto com o conhecido método da eliminação. Este método consiste em tentar livrar-se de uma das variaveis (x ou y) para obter uma equação na qual so aparece a outra variavel (y ou x). Nós observamos que se multiplicamos por 3 a primeira equação e por 2 a segunda obtemos as seguintes equações equivalentes:

$$6x + 3y = 3 \tag{3}$$

$$6x - 4y = 8 \tag{4}$$

Agora, se subtraemos a segunda equação da primeira, ou seja, subtraemos cada lado da segunda equação do correspondente lado da primeira equação, observamos que a variavel x desaparece (foi eliminada),

$$3y - (-4y) = 3 - 8 \quad \text{ou} \quad 7y = -5 \tag{5}$$

Nós já sabemos resolver esta equação, $y = -\frac{5}{7}$. Podemos encontrar o valor de x que resolve simultaneamente as equações () e () subtituindo o valor determinado para y em qualquer uma das duas equações () ou (). Ou seja, escolhendo a equação () fazendo o procedimento segue: $2x - \frac{5}{7} = 1$, que é outra equação facil de resolver, $x = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$. O mesmo resultado seria obtido se escolhemos y para ser eliminada.

Pode acontecer que um sistema de duas equações deste tipo não possua solução. Por exemplo resolva o seguinte sistema linear de equações:

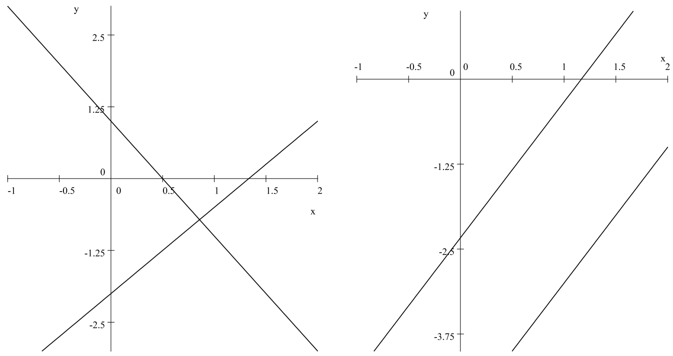
$$2x - y = 5 \tag{6}$$

$$6x - 3y = 7 \tag{7}$$

Aplicando o método de eliminação (divida a segunda equação por 3 e faza a subtração) obtemos: $0 = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$ o qual é um absurdo, portanto o sistema não tem solução. Isto é, não existem valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas equações.

Já sabemos que, geometricamente, a equação do tipo $ax + by = c$ representa uma linha reta no plano. Portanto cada equação do nosso problema representa uma linha reta. Então, encontrar os valores de x e y que simultaneamente satisfazem as duas equações (resolver o sistema algebricamente) corresponde geometricamente a encontrar o ponto do plano no qual as duas linhas se intersetam. Também podemos percever que se o sistema de equações lineares não tem solução algebrica, geometricamente significa que as duas linhas retas são paralelas, ou seja, não existe nenhum ponto do plano no qual elas se encontram.

Sejam a, b, c, d, u e v números reais conhecidos. Resolva o seguinte sistema de equações lineares em x e y, usando o método da eliminação.



Equações $2x + y = 1$ e $3x - 2y = 4$ Equações $2x - y = 5$ e $6x - 3y = 7$

Figure 19: Exemplos.

$$ax + by = u \tag{8}$$

$$cx + dy = v \tag{9}$$

Se multiplicamos (8) por c, (9) por a obtemos

$$acx + bcy = cu \tag{10}$$

$$acx + ady = av \tag{11}$$

se subtraemos (8)-(9) obtemos

$(bc - ad)y = (cu - av)$ que tem solução $y = \frac{(cu-av)}{(bc-ad)}$ se e somente se $(bc - ad) \neq 0$. O valor de x é encontrado subtituindo o valor de y em (8) $x = \frac{(bv-du)}{(bc-ad)}$.

Ou seja se $(bc - ad) = 0$, então as duas linhas retas são paralelas e viceversa.

Este resultado pode ser obtido usando o Teorema que estabelece que duas linhas L_1 e L_2 são paralelas se e somente se elas tem a mesma inclinação $m_1 = m_2$. De fato a equação (8) pode ser escrita na forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{u}{b}$ sempre que $b \neq 0$ ($m_1 = -\frac{a}{b}$), similarmente a equação (9) pode ser escrita como $y = -\frac{c}{d}x + \frac{v}{d}$ sempre que $d \neq 0$ ($m_2 = -\frac{c}{d}$). Como as duas retas são paralelas ($m_1 = m_2$) segue que $-\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$ ou $(bc - ad) = 0$.

Em outras palavras podemos dizer pelo Teorema que, se $(bc - ad) = 0$, então as duas restas são paralelas, e se as duas retas são paralelas, então $(bc - ad) = 0$. Equivalentemente podemos dizer (sem prova) que, se $(bc - ad) \neq 0$, então o sistema de equações lineares tem solução, e se o sistema de equações lineares tem solução, então $(bc - ad) \neq 0$.

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.

2- Serge Lang, Cálculo, V1.

3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.

4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.

5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.

6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.

7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.
9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.
10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.