

# NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

## Tópico 7- Aplicações da Integral Definida.

7.1 - Cálculo de áreas de figuras planas.

7.2 - Cálculo de comprimento.

7.3 - Volumes de sólidos de revolução.

7.4 - Área de sólidos de revolução.

### 7.1 - Cálculo de áreas de figuras planas.

**Definição 1 (Trapezio Curvilíneo)** Por trapezio curvilíneo entendemos uma figura plana limitada pelo eixo  $x$ , duas retas paralelas ao eixo  $y$  ( $x = a$  e  $x = b$ ) e o gráfico da função  $f(x)$  definida não negativa e contínua no intervalo  $[a, b]$ .

Definido desta forma a área do trapezio curvilíneo coincide com a integral como mostrado na figura abaixo.

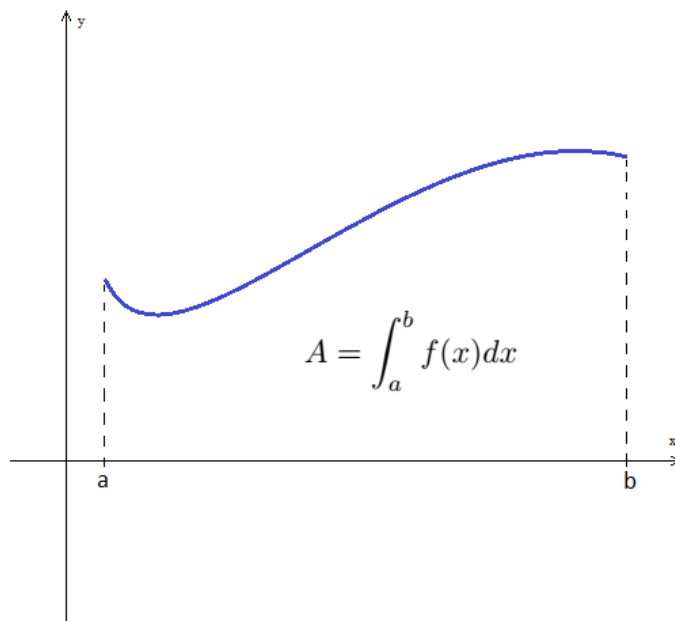


Figure 1: Área do trapezio curvilíneo.

Porém, nem toda figura plana medível é um trapezio curvilíneo. Logo, é necessário fazer algumas observações para calcular a área de figuras planas.

1) Se  $f(x)$  é negativa no intervalo  $[a, b]$ , então a área é calculada como  $A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ . Veja a figura 2.

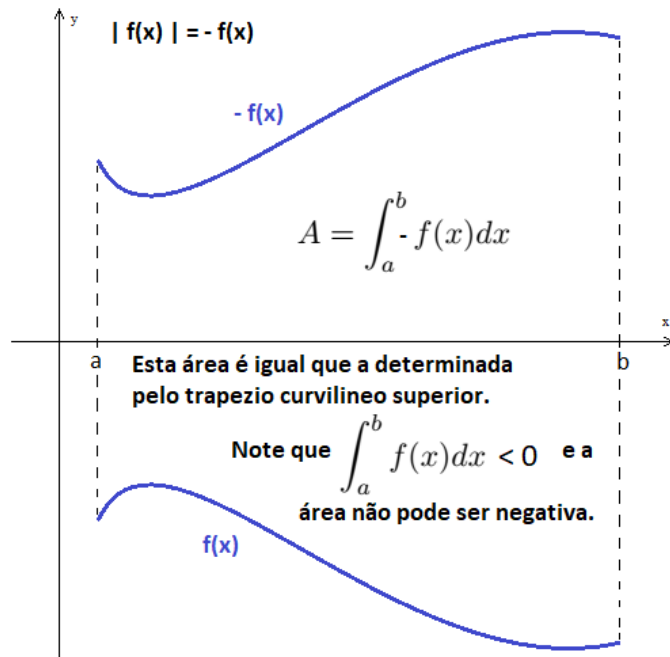


Figure 2: Área de figuras planas definidas por funções negativas.

2) Se  $f(x)$  muda de sinal um número finito de vezes no intervalo  $[a, b]$ , então a área é calculada como  $A = \int_a^b |f(x)| dx$ , e devem ser encontrados os pontos onde  $f(x)$  muda de sinal para poder fazer  $|f(x)| = -f(x)$ .

3) Se a figura plana é limitada superior e inferiormente por duas funções contínuas  $f(x)$  e  $g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , então a área é calculada como  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$ . Veja a figura 3.

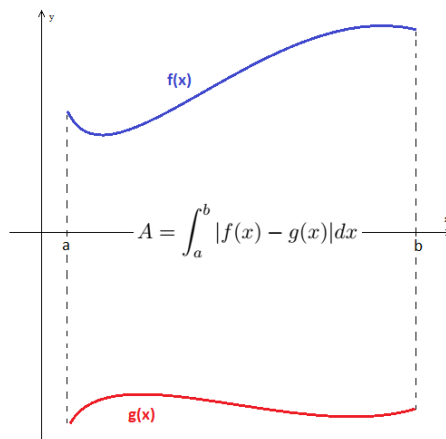


Figure 3: Área da figura plana limitada por duas funções.

4) Qualquer figura plana que possa ser decomposta como sendo a união de um número

finito de figuras planas do tipo anterior, então a área pode ser calculada como sendo a soma das áreas de cada figura.

**Exemplo:** Calcule a área da figura plana limitada pelas funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ .

Em exemplos como estes se recomenda esboçar o gráfico para visualizar a região onde está a área que se quer calcular. No esboço do gráfico podem ser colocados em prática todos os conhecimentos estudados até aqui: pontos críticos, crescimento, interseções, etc. Neste caso específico, ao esboçar o gráfico vemos que estas duas funções se interseccionam em dois pontos, e estes pontos são encontrados igualando as funções. Isto é, os valores de  $x$  onde as funções se interseccionam são  $f(x) = g(x)$  ou  $x^2 = \sqrt{x}$ . Equações como estas foram resolvidas no Tópico 1 Pré-cálculo, e os dois pontos são  $x = 0$  e  $x = 1$ . Veja detalhes na figura 4. A área que tem utilidade prática está delimitada pelo intervalo  $[0, 1]$ , já que para  $x > 1$  a região tem área infinita. Além disto, no intervalo  $[0, 1]$  temos que  $\sqrt{x} \geq x^2$ , logo

$$A = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2| dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

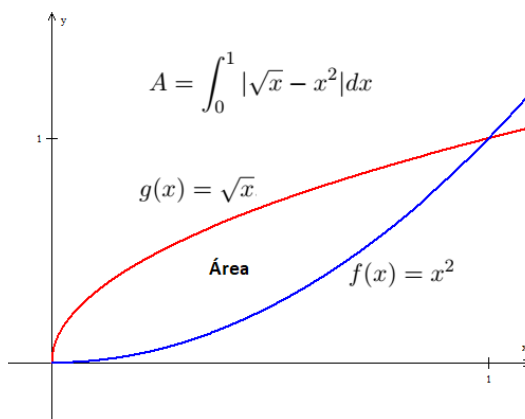


Figure 4: Área da figura plana limitada por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \sqrt{x}$ .

## 7.2 - Cálculo de comprimento.

O comprimento do arco de uma curva  $y = f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  pode ser calculado usando a ideia da integral definida. Para isto o intervalo é dividido em pequenos segmentos, e o comprimento de cada parte da curva pode ser calculados usando o teorema de Pitágoras. Depois de somados os comprimentos de todas as fatias da curva passamos ao limite quando o maior  $\Delta x_i$  tende para zero. Este limite coincide com o comprimento procurado e representa a soma de todos os comprimentos infinitesimais. Veja detalhes na figura 5.

$$\Delta L_i = \sqrt{[(x_i + \Delta x_i) - x_i]^2 + [y_i + \Delta y_i - y_i]^2} = \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [\Delta y_i]^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right]^2}$$

$$L \approx \sum_{i=1}^{n+1} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right]^2} \Delta x_i$$

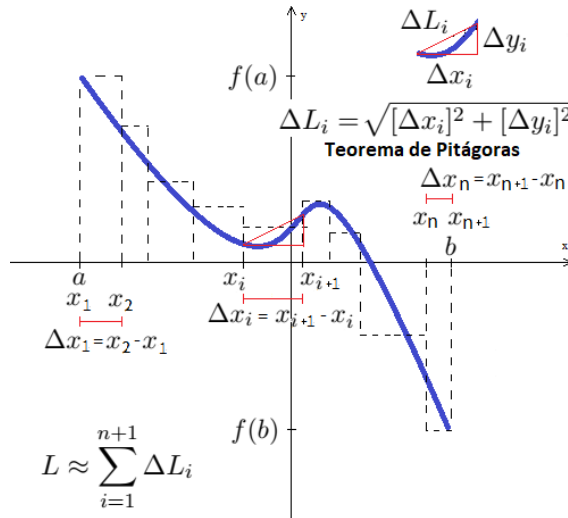


Figure 5: Uso da integral definida para o cálculo do comprimento.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \Delta L_i = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{1 + \left[\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx$$

Se a curva é definida através das equações paramétricas ( $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$ ) o procedimento é o mesmo e obtemos:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \Delta L_i = \lim_{\max\{\Delta t_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right]^2 + \left[\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right]^2} \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} dt$$

**Exemplo:** Determine o comprimento da astroide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , onde  $a > 0$ .

Se recomenda esboçar o gráfico para visualizar a região e o formato do comprimento que se quer calcular. Note na figura 6 que a astroide possui simetria, e isto ajuda a simplificar os cálculos.

Como a figura é simétrica temos  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$  e  $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 4L_1$ .

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx$$

A derivada  $\frac{dy}{dx}$  pode ser calculada explicitando  $y$  em função de  $x$  ou derivando a equação da astroide usando a derivada da função implícita. Vamos optar pela segunda via que é menos trabalhosa.

$$\frac{d}{dx} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{d}{dx} \left( a^{\frac{2}{3}} \right) \text{ ou } \frac{2}{3} x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} + \frac{2}{3} y^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} \frac{dy}{dx} = 0, \text{ que simplificando leva a } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Substituindo na fórmula do comprimento obtemos

$$L_1 = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_0^a \left| \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right| dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\left(-\frac{1}{3}+1\right)}}{-\frac{1}{3}+1} \Big|_0^a = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} [a^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}] = \frac{3a}{2}.$$

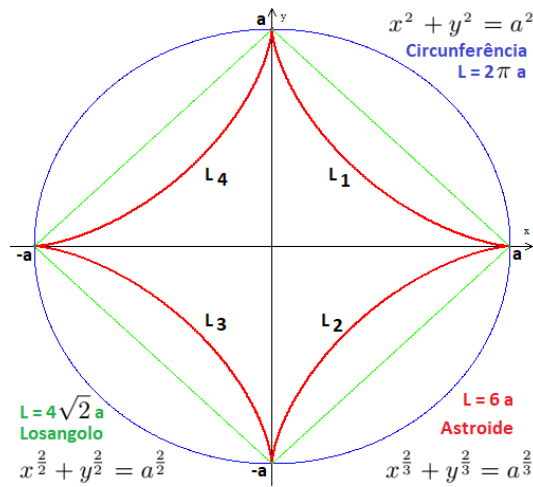


Figure 6: Comprimento da Astroide.

Logo,  $L = 4L_1 = 4 \frac{3a}{2} = 6a$ . Como curiosidade compare o comprimento da astroide ( $L = 6a$ ), losangolo ( $L = 4\sqrt{2}a$ ) e circunferência ( $L = 2\pi a$ ).

### 7.3 - Volumes de sólidos de revolução.

O volume formado pela rotação entorno do eixo  $x$  do trapazio curvilinear  $y = f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  pode ser determinado usando a ideia da integral definida. Veja detalhes na figura 7.

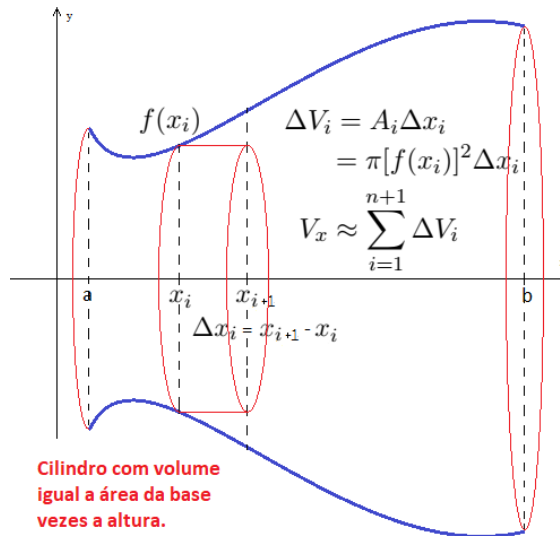


Figure 7: Uso da integral definida para o cálculo do volume de sólido de revolução.

$$\Delta V_i = A_i \Delta x_i = \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

$$V_x \approx \sum_{i=1}^{n+1} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n+1} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

$$V_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \Delta V_i = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Analogamente pode ser determinado o volume quando a rotação é entorno do eixo  $y$ .

$$dV_y = 2\pi x f(x) dx, \quad V_y = \int_a^b dV_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

**Exemplo:** Determine o volume do corpo de revolução gerado pela rotação entorno do eixo  $x$  da senoide  $y = \text{sen}(x)$  no intervalo  $[0, \pi]$ .

$$V_x = \pi \int_0^\pi \text{sen}^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] dx = \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \text{sen}(2x) \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left[ (\pi - \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi)) - (0 - \frac{1}{2} \text{sen}(2 \cdot 0)) \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

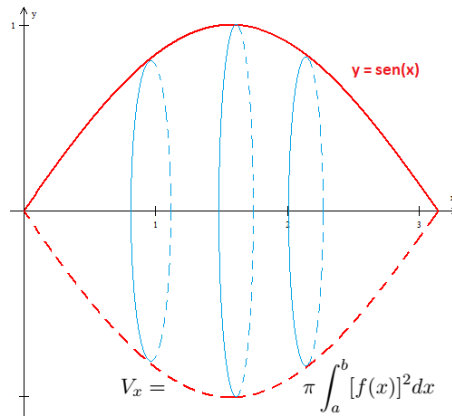


Figure 8: Volume do corpo de revolução da senoide.

#### 7.4 - Área de sólidos de revolução.

A área de uma superfície não plana gerada pela rotação do arco de uma curva  $y = f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  entorno do eixo  $x$  pode ser determinada usando a ideia anteriormente apresentada para calcular volume e comprimento. Neste caso teremos  $\Delta A_i = 2\pi f(x_i) \Delta L_i$  que corresponde à área de um retângulo com base  $2\pi f(x_i)$  e altura  $\Delta L_i$ . Note que a base do retângulo é o perímetro de uma circunferência com raio  $f(x_i)$ , e a altura é o comprimento  $\Delta L_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right]^2}$ . Desta forma somando todas estas áreas temos aproximadamente a área de interesse  $A_x \approx \sum_{i=1}^{n+1} \Delta A_i$ . Quando tomamos o limite obtemos exatamente a área de interesse dada pela equação abaixo.

$$A_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \Delta A_i = 2\pi \int_a^b y dL = 2\pi \int_a^b y \frac{dL}{dx} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2} dx.$$

**Exemplo:** Determine a área da superfície gerada ao rotar entorno do eixo  $x$  o laço da curva  $9y^2 = x(3-x)^2$ .

Note na figura 9 que a região de interesse está limitada ao intervalo  $[0, 3]$ . Para calcular a derivada  $\frac{dy}{dx}$  derivamos a equação usando a derivada da função implícita.

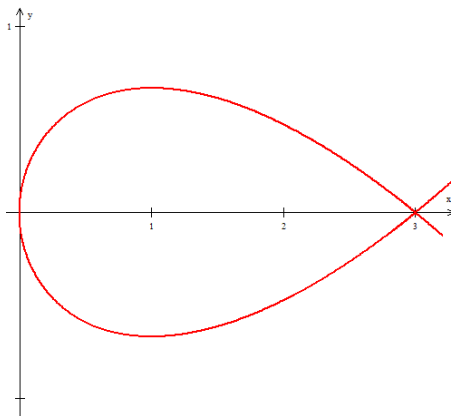


Figure 9: Área da superfície de revolução do laço.

$\frac{d}{dx}(9y^2) = \frac{d}{dx}(x(3-x)^2)$  ou  $18y \frac{dy}{dx} = (3-x)^2 - 2x(3-x)$  que simplificando obtemos  $\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x)(1-x)}{6y}$ . Logo,  $y\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(6y)^2 + (3-x)^2(1-x)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{4x(3-x)^2 + (3-x)^2(1-x)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(3-x)^2(1+x)^2} = \frac{1}{6}|3-x||1+x|$ . Substituindo na integral obtemos

$$\begin{aligned} A_x &= 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx = \frac{2\pi}{6} \int_0^3 (3-x)(1+x) dx = \frac{2\pi}{6} \int_0^3 (3 + 2x - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi}{6} \left(3x + 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{2\pi}{6} \left[\left(3 \cdot 3 + 2\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 0 + 2\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right)\right] = 3\pi. \end{aligned}$$

#### Referências Bibliográficas

- 1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.
- 2- Serge Lang, Cálculo, V1.
- 3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.
- 4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.
- 5- Diva Marília Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.
- 6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.
- 7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.
- 8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.
- 9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.
- 10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.
- 11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.