NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 6- Cálculo Integral.
6.1 - Integral indefinida.
6.2 - Métodos de integração.
6.3 - Integral definida. Interpretação geométrica da integral definida.
6.4 - Principais teoremas para a integral definida.
6.5 - Cambio de variável na integral definida. Integração por parte na integral definida.

6.1 - Integral indefinida.

Definição 1 ***(Conceito de Primitiva)*** *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo I. A função $F(x)$ também definida em I é dita ser a primitiva de $f(x)$ em I se $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.*

Exemplo: $F(x) = sen(x)$ é uma primitiva de $f(x) = cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, já que $F'(x) = [sen(x)]' = cos(x) = f(x)$.

Exemplo: $F(x) = ln(x)$ é uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (0, +\infty)$, já que $F'(x) = [ln(x)]' = \frac{1}{x} = f(x)$.

Pela definição de primitiva podemos concluir que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ no intervalo I, então $[F(x) + C]$, onde C é uma constante arbitrária, também é primitiva de $f(x)$ no intervalo I. Isto porque $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$.

Definição 2 *Chamamos integral indefinida de $f(x)$ em I ao conjunto de todas as primitivas de $f(x)$ no intervalo. O símbolo $\int$ é chamado de signo de integração e $f(x)$ de função integrando. A notação usada para representar a integral indefinida é $\int f(x)dx$, onde o dx representa o diferencial da variável independente.*

Considerando as definições de primitiva e integral indefinida podemos obter as principais regras de integração:

P1) $\int f(x)dx = F(x) + C$ se $F'(x) = f(x)$, onde C é uma constante arbitrária. Está propriedade nada mais é que a representação simbólica da integral indefinida.

P2) $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$. Isto porque $d[\int f(x)dx] = d[F(x)+C] = F'(x)dx = f(x)dx$. Portanto, os símbolos "d" e "$\int$" se eliminam quando "d" se aplica depois de "$\int$". Em palavras esta propriedade significa que a derivada é a opração inversa da integração. Em alguns livros a integral indefinida é chamada de antiderivada.

P3) $\int dF(x) = F(x) + C$. Isto porque $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, logo $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

P4) $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx = KF(x) + C$, onde K é uma constante.

P5) Se as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ possuem primitivas em I, então se verifica $\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Tabela das principais integrais indefinidas.

Já que a derivada e a intergral indefinida são operações inversas, então conhecendo a tabela de derivas podemos construir uma tabela de integral indefinida. Na tabela considere que C é uma constante arbitrária.

Integrais	**Derivadas**
$\int 0dx = C.$	$[C]' = 0.$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, se $n \neq -1$.	$[\frac{x^{n+1}}{n+1}]' = x^n.$
$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = ln\|x\| + C.$	$[ln(x)]' = \frac{1}{x}.$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$, $0 < a \neq 1$. Se $a = e$, então $\int e^x dx = \frac{e^x}{ln(e)} + C = e^x + C.$	$[\frac{a^x}{ln(a)}]' = a^x$, $0 < a \neq 1$. $[e^x]' = e^x.$
$\int sen(x)dx = -cos(x) + C.$	$[cos(x)]' = -sen(x).$
$\int cos(x)dx = sen(x) + C.$	$[sen(x)]' = cos(x).$
$\int sec^2(x)dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + C$, se $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$.	$[tg(x)]' = \frac{1}{cos^2(x)}.$
$\int csc^2(x)dx = \int \frac{1}{sen^2(x)}dx = -ctg(x) + C$, se $x \neq n\pi$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$.	$[ctg(x)]' = -\frac{1}{sen^2(x)}.$
$\int sh(x)dx = ch(x) + C.$	$[ch(x)]' = sh(x).$
$\int ch(x)dx = sh(x) + C.$	$[sh(x)]' = ch(x).$
$\int \frac{1}{ch^2(x)}dx = th(x) + C.$	$[th(x)]' = \frac{1}{ch^2(x)}.$
$\int \frac{1}{sh^2(x)}dx = cth(x) + C.$	$[cth(x)]' = \frac{1}{sh^2(x)}.$

Utilizando a tabela de integrais e as regras principais de integração podemos encontrar a integral indefinida de muitas outras funções.

Exemplo: $\int(4cos(x) + 6 + 2x^2)dx = \int 4cos(x)dx + \int 6dx + \int 2x^2dx = 4\int cos(x)dx + 6\int 1dx + 2\int x^2dx = 4sen(x) + C_1 + 6x + C_2 + 2\frac{x^3}{3} + C_3 = 4sen(x) + 6x + 2\frac{x^3}{3} + C$, onde $C = C_1 + C_2 + C_3$ porque todas são constantes arbitrárias.

Note que derivando o resultado da integral devemos obter a função integrando, e isto pode ser usado para verificar se cometemos algum erro no cálculo da integral. Isto é, já que $\int f(x)dx = F(x) + C$ se $F'(x) = f(x)$, então $[4sen(x) + 6x + 2\frac{x^3}{3}]' = 4cos(x) + 6 + 2x^2$.

Existem tabelas com maior número de funções integrando. Aqui colocamos as funções elementares básicas e algumas outras, e estas o aluno deve saber para poder fazer outras disciplinas. Existem livros inteiros de tabelas de integrais com centenas de páginas. Geralmente, quando é dificil calcular a integral de uma função esse resultado se tabela. Porém, é impossível tabelar a integral de todas as funções porque são infinitas possibilidades. Por este motivo os métodos de integração são importates. Aqui apresentaremos oito métodos de integração.

6.2 - Métodos de integração.

Método -1 Completar o diferencial.

Se conhecemos de tabela que $\int f(x)dx = F(x) + C$ e precisamos encontrar $\int f(u)du$, onde $u = \varphi(x)$, ou seja, $\int f(\varphi(x))[\varphi(x)]'dx$. Então $\int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$.

Note que $\int f(u)du = \int f(\varphi(x))[\varphi(x)]'dx$, já que $du = [\varphi(x)]'dx$. Portanto, completar o diferencial consiste em escolher um $u = \varphi(x)$ tal que $f(\varphi(x))[\varphi(x)]'dx{=}f(u)du = df$. Em palavras, que a expressão sob o símbolo de integral seja o diferencial de alguma função.

Exemplo: Cálcule $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}dx$.

Note que $d(5x-2) = [5x-2]'dx = 5dx$. Logo, $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\frac{5}{5}dx$. Aqui multiplicamos e dividimos por 5. Isto não altera a expressão subintegrando, mas permite completar o diferencial já que $5dx = d(5x-2)$. Logo, $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\frac{5}{5}dx{=} \int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\frac{1}{5}d(5x-2) = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}d(5x-2){=}\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$, onde $u = (5x-2)$. Desta forma já completamos o diferencial e podemos usar a tabela de integrais.

Sabendo de tabela que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Logo, $\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{-\frac{1}{2}}du{=}2u^{\frac{1}{2}} + C$. Portanto, $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}dx{=}\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}d(5x-2){=}\frac{2}{5}(5x-2)^{\frac{1}{2}} + C{=}\frac{2}{5}\sqrt{5x-1} + C$.

Como uma forma de verificar nossos cálculos determinamos $F'(x) = [\frac{2}{5}\sqrt{5x-1}]' = \frac{1}{5}(5x-1)^{(-\frac{1}{2}-1)}[5x-2]'{=}\frac{1}{\sqrt{5x-2}} = f(x)$ que é a função integrando.

Método -2 Substituição de variável ou mudança de variável.

Quando queremos cálcular $\int f(x)dx$ podemos trocar a variável x por outra t fazendo $x(t) = \varphi(t)$. Neste caso é necessário que a função $\varphi(t)$ seja contínua e diferenciavel, já que $dx = \varphi'(t)dt$. Desta forma a função composta $f(x) = F(\varphi(t))$ também é continua e se verifica que

$$\int f(x)dx = \int F(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

A função $\varphi(t)$ deve ser escolhida de forma que a nova integral seja mais facil de integral por algum outro método de integração ou pelas integrais de tabela.

Exemplo: Cálcule $\int x\sqrt{x-1}dx$?

Vamos resolver esta integral pelos dois métodos estudados até agora: completar o diferencial e substituição de variável.

Completanto o diferencial:

Note que $d(x-1) = dx$, logo $\int x\sqrt{x-1}dx = \int x\sqrt{x-1}d(x-1){=}\int(x-1+1)\sqrt{x-1}d(x-1){=}\int(x-1)\sqrt{x-1}d(x-1) + \int\sqrt{x-1}d(x-1)$. Nestas duas integrais o integrando já é um diferencial completo, onde $u = (x-1)$. Portanto, $\int(x-1)\sqrt{x-1}d(x-1){=}\int(x-1)^{(1+\frac{1}{2})}d(x-1){=}\int(x-1)^{\frac{3}{2}}d(x-1){=}\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C_1$. Também, $\int\sqrt{x-1}d(x-1){=}\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Substituição de variável:

Trocando x por t com a substituição $t=\sqrt{x-1}$ conseguimos eliminar a raiz da função integrando. Note que a função inversa para a substituição é $x=t^2+1$, logo $dx=[t^2+1]'dt=2tdt$. Portanto,

$\int x\sqrt{x-1}dx=\int(t^2+1)t2tdt{=}2\int(t^4+t^2)dt=2\{\int t^4dt+\int t^2dt\}=2\{\frac{t^5}{5}+C_1+\frac{t^3}{3}+C_2\}$ $=2\{\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\}+C=2\{\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\}+C.$

Para verificar que não houve erro no cálculo é suficiente verificar que $[2\{\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\}]'=x\sqrt{x-1}$.

É importante destacar que não importa qual ou quais métodos de integração foram usados, a resposta sempre deve ser a mesma. Em outras palavras, a solução é única.

Método - 3 Substituições trigonomêtricas.

Este método é um caso especial do Método 2 - Substituição de variável. O método é útil quando queremos eliminar a raiz quadrada em alguma função integrando. O método sempre eliminará a raiz, porém isto não implica em que a nova integral seja mais simples que a original. Por este motivo as substituições trigonomêtricas nem sempre são o método mais conveniente a usar. Existem três casos para eliminar a raiz.

1) Quando a integral possue o radical $\sqrt{a^2-x^2}$ a raiz será eliminada se fazemos $x=asen(t)$. Isto porque $\sqrt{a^2-x^2}{=}\sqrt{a^2-a^2sen^2(t)}{=}\sqrt{a^2[1-sen^2(t)]}{=}\sqrt{a^2}\sqrt{cos^2(t)}$ $=|a||cos(t)|{=}acos(t)$ se $a>0$ e $cos(t)>0$. Além disto, $dx=[asen(t)]'dt{=}acos(t)dt$.

2) Quando a integral possue o radical $\sqrt{x^2-a^2}$ a raiz será eliminada se fazemos $x=asec(t){=}\frac{a}{cos(t)}$. Isto porque $\sqrt{x^2-a^2}{=}\sqrt{\frac{a^2}{cos^2(t)}-a^2}{=}\sqrt{\frac{a^2-a^2cos^2(t)}{cos^2(t)}}=\sqrt{\frac{a^2[1-cos^2(t)]}{cos^2(t)}}$ $=\sqrt{\frac{a^2sen^2(t)}{cos^2(t)}}=\frac{|a||sen(t)|}{|cos(t)|}=|a||tg(t)|{=}atg(t)$ se $a>0$ e $tg(t)>0$. Além disto, $dx=[asec(t)]'dt$ $=\frac{a}{cos^2(t)}dt$.

3) Quando a integral possue o radical $\sqrt{x^2+a^2}$ a raiz será eliminada se fazemos $x=atg(t)$. Isto porque $\sqrt{x^2+a^2}{=}\sqrt{\frac{a^2sen^2(t)}{cos^2(t)}+a^2}{=}\sqrt{\frac{a^2sen^2(t)+a^2cos^2(t)}{cos^2(t)}}=\sqrt{\frac{a^2[sen^2(t)+cos^2(t)]}{cos^2(t)}}=\sqrt{\frac{a^2}{cos^2(t)}}$ $=\frac{|a|}{|cos(t)|}=\frac{a}{cos(t)}$ se $a>0$ e $cos(t)>0$. Além disto, $dx=[atg(t)]'dt=\frac{a}{cos^2(t)}dt$.

Exemplo: Cálcule $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$? Sabendo que na tabela de integrais temos $\int\frac{1}{cos(t)}dt=ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+C=ln\left|tg(x)+sec(x)\right|+C$.

Neste caso $a=1$ e fazendo $x=tg(t)$ segue $dx=[tg(t)]'dt=\frac{1}{cos^2(t)}dt$. Note que $\sqrt{x^2+1}$ $=\sqrt{tg^2(t)+1}=\sqrt{\frac{sen^2(t)+cos^2(t)}{cos^2(t)}}=\sqrt{\frac{1}{cos^2(t)}}=\frac{1}{|cos(t)|}=\frac{1}{cos(t)}$ se $cos(t)>0$. Substituindo na integral original obtemos

$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx=\int\frac{\frac{1}{cos(t)}}{tg^2(t)}\frac{1}{cos^2(t)}dt=\int\frac{1}{cos(t)sen^2(t)}dt$. Esta integral pode parecer mais díficil que a original, mas não é se usarmos identidades trigonomêtricas. Note que esta integral pode ser dividida em duas se fazemos

$\int\frac{1}{cos(t)sen^2(t)}dt{=}\int\frac{sen^2(t)+cos^2(t)}{cos(t)sen^2(t)}dt=\int\frac{1}{cos(t)}dt+\int\frac{cos(t)}{sen^2(t)}dt.$

A primeira integral já está na tabela. Falta calcular a segunda integral que pode ser resolvida completando o diferencial.

$\int \frac{cos(t)}{sen^2(t)}dt = \int \frac{d(sen(t))}{sen^2(t)}$, já que $d(sen(t)) = cos(t)dt$. Logo se fazemos $u = sen(t)$ segue que

$\int \frac{d(sen(t))}{sen^2(t)} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{(-2+1)}}{-2+1} + C_2 = -\frac{1}{u} + C_2 = -\frac{1}{sen(t)} + C_2$.

Agora substituimos as duas integrais para obtermos

$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \int \frac{1}{cos(t)}dt + \int \frac{cos(t)}{sen^2(t)}dt = ln\,|tg(t) + sec(t)| + C_1 - \frac{1}{sen(t)} + C_2 = ln\,|tg(t) + sec(t)| - \frac{1}{sen(t)} + C$.

Deta forma foi resolvido o problema, mas o problema original estava formulado na variável x e não t. Por este motivo a resposta deve ser colocada na variável x. Sabemos que a substituição foi $x = tg(t)$ e sua função inversa é $t = arctg(x)$. Desta forma $sen(t) = sen(arctg(x))$ e $cos(t) = cos(arctg(x))$. Substituindo tudo obtemos

$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = ln\left|x + \frac{1}{cos(arctg(x))}\right| - \frac{1}{sen(arctg(x))} + C$.

Porém, este resultado apresenta funções trigonométricas inversas que precisaram do uso de computadores. Estas expressões trigonométricas inversas podem ser eliminadas se fazemos um pouco de simpificações (pré-cálculo) como segue.

$sec(t) = \frac{1}{cos(t)} = \sqrt{\frac{1}{cos^2(t)}} = \sqrt{\frac{sen^2(t)+cos^2(t)}{cos^2(t)}} = \sqrt{1 + \frac{sen^2(t)}{cos^2(t)}} = \sqrt{1 + tg^2(t)} = \sqrt{1+x^2}$.

De forma semelhante temos

$\frac{1}{sen(t)} = \sqrt{\frac{1}{sen^2(t)}} = \sqrt{\frac{sen^2(t)+cos^2(t)}{sen^2(t)}} = \sqrt{1 + \frac{cos^2(t)}{sen^2(t)}} = \sqrt{1 + \frac{1}{tg^2(t)}} = \frac{\sqrt{1+tg^2(t)}}{tg(t)} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Note que com estas manipulações algébricas eliminamos as funções trigonométricas e suas inversas. Desta forma a resposta final pode ser escrita como

$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

Método 4 - Integração por partes.

Teorema 1 *Sejam $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$ duas funções diferenciaveis, então se verifica*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Isto é uma consequência da regra de derivada do produto de duas funções $[uv]' = u'v + uv'$. Na forma diferencial seria $d[uv] = duv + udv$. Se integramos qualquer uma das duas obteremos $\int d[uv] = \int duv + \int udv$ ou $uv = \int duv + \int udv$, que é o resultado do teorema da integração por parte. Note que a integral é separada em duas partes. Para tirar utilidade prática deste teorema no cálculo de integrais se recomenda escolher dv como aquela que sabemos integrar, já que $v = \int dv$.

Exemplo: Cálcule $\int xln(x)dx$?

Neste exemplo, se usarmos os três primeiros métodos de integração estudados não conseguiremos avançar muito. Entretanto, a integração por parte resolve o problema. Vamos escolher $u = ln(x)$ porque sabemos derivar facilmente, ou seja, $u' = \frac{1}{x}$ e $du = \frac{1}{x}dx$. Escolhemos $dv = xdx$ porque sabemos integrar facilmente, ou seja, $\int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Aqui não colocamos a constante arbitrária porque estamos interesados apenas numa primitiva e não no conjunto de todas elas. Usando o teorema de integração por partes obtemos:

$\int xln(x)dx = ln(x)(\frac{x^2}{2}) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = ln(x)(\frac{x^2}{2}) - \frac{1}{2}\int xdx = ln(x)(\frac{x^2}{2}) - \frac{1}{4}x^2 + C.$

Note que neste exemplo se for feita a escolha ao contrário não teriamos avançado muito. Isto é, se $u = x$ temos $du = dx$, porém $dv = ln(x)dx$ que não sabemos como integrar $\int dv = \int ln(x)dx$. Mas como cálcular $\int dv = \int ln(x)dx$?

Exemplo: Cálcule $\int ln(x)dx$?

Esta integral é facil de ser resolvida usando a integração por parte se fazemos a escolha certa de u e dv. Escolha $u = ln(x)$, logo $du = \frac{1}{x}dx$. Portanto, $dv = dx$, logo $v = x$. Usando a integração por parte obtemos

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = xln(x) - x + C.$

Método 5 - Integrais do tipo $\int \frac{mx+n}{Ax^2+Bx+C}dx$.

O procedimento consiste em reduzir o trinômio de segundo grau na forma $Ax^2 + Bx + C = A(x+K)^2 + L$, onde K e L são constantes que devem ser encontradas tal que $K = \frac{B}{2A}$ e $L = C - \frac{B^2}{4A}$. Depois de completar o quadrado existem duas possibilidades.

1) Se $m = 0$ fazendo o procedimento acima mencionado obtemos integrais imediatas ou de tabela do tipo:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\Big(\frac{x}{a}\Big) + C, \text{se } a \neq 0.$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C, \text{se } a \neq 0.$$
$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}ln\Big|\frac{a+x}{a-x}\Big| + C, \text{se } a \neq 0.$$

2) Se $m \neq 0$, separamos do numerador a derivada do trinômio de segundo grau $[Ax^2 + Bx + C]' = 2Ax + B$. Assim, $mx + n = \frac{m}{2A}(2Ax+B) + (n - \frac{mB}{2A})$. Portanto,
$\int \frac{mx+n}{Ax^2+Bx+C}dx = \int \frac{\frac{m}{2A}(2Ax+B)+(n-\frac{mB}{2A})}{Ax^2+Bx+C}dx = \int \frac{\frac{m}{2A}(2Ax+B)}{Ax^2+Bx+C}dx + \int \frac{(n-\frac{mB}{2A})}{Ax^2+Bx+C}dx.$
A primeira integral pode ser calculada facilmente porque o diferencial foi completado. Isto é, $d(Ax^2 + Bx + C) = (2Ax + B)dx$, logo $\int \frac{\frac{m}{2A}(2Ax+B)}{Ax^2+Bx+C}dx = \frac{m}{2A}\int \frac{1}{u}du = \frac{m}{2A}ln|Ax^2 + Bx + C|$ se fazemos $u = Ax^2 + Bx + C$. A segunda integral é do caso 1) quando $m = 0$. Portanto,
$\int \frac{mx+n}{Ax^2+Bx+C}dx = \frac{m}{2A}ln|Ax^2 + Bx + C| + (n - \frac{mB}{2A})\int \frac{1}{Ax^2+Bx+C}dx.$

Exemplo: Cálcule $\int \frac{1}{2x^2-5x+7}dx$?

Neste exemplo temos $m = 0$, $n = 1$, $A = 2$, $B = -5$ e $C = 5$. Logo, $K = \frac{B}{2A} = \frac{-5}{4}$ e $L = C - \frac{B^2}{4A} = 5 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8}$. Logo, $(2x^2 - 5x + 7) = 2(x + \frac{-5}{4})^2 + \frac{15}{8}$.
$\int \frac{1}{2x^2-5x+7}dx = \int \frac{1}{2(x+\frac{-5}{4})^2+\frac{15}{8}}dx$. Fazendo $t = x - \frac{5}{4}$ temos $dt = dx$ e obtemos $\int \frac{1}{2(t)^2+\frac{15}{8}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{15}{16}}dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16}}}arctg\Big(\frac{t}{\sqrt{\frac{15}{16}}}\Big) + C$ usando a tabela acima. Voltando a variável original temos

$\int \frac{1}{2x^2-5x+7}dx = \frac{4}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{4x-5}{\sqrt{15}}\right) + C.$

Método 6 - Integrais do tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$.

Neste caso o procedimento é similar ao descrito no Método 5 para obter as integrais imediatas ou tabeladas:

$$\text{i) se } A > 0, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$\text{ii) se } A < 0, \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = arcsen(\frac{x}{a}) + C.$$

Exemplo: Cálcule $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx$?

Neste exemplo temos $m = 0$, $n = 1$, $A = -2$, $B = 3$ e $C = 2$, logo $K = -\frac{3}{4}$ e $L = 2-\frac{9}{16}$. Portanto, $2 + 3x - 2x^2 = -2(x - \frac{3}{4})^2 + 2 - \frac{9}{16}$ e $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-2(x-\frac{3}{4})^2+2-\frac{9}{16}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-2t^2+\frac{23}{16}}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{23}{8}-t^2}}dt$, onde $t = (x - \frac{3}{4})$. Agora pode ser usado o item ii) da tabela:

$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{23}{8}-t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}arcsen(\frac{8t}{23}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}arcsen(\frac{4x-3}{46}) + C.$

Método 7 - Integração de frações simples ou funções racionais.

Este método também é conhecido como método dos coeficientes indeterminados, e trata da integração de funções racionais $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios inteiros, sendo o grau de $P(x)$ menor que o grau de $Q(x)$. O método pode ser usado sempre que todas as raizes do polinômio $Q(x)$ sejam reais. Isto porque assume a decomposição $Q(x) = (x - a)^\alpha(x - b)^\beta \cdots (x - l)^\lambda$, onde $a, b, \ldots, l$ são as raizes reais do polinômio $Q(x)$, e $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ são os naturais que determinam a multiplicidade de cada raiz. Então a fração $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode ser decomposta em frações simples como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{(x-b)} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots + \frac{L_1}{(x-l)} + \cdots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}.$$

Para determinar os coeficientes indeterminados $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, L_1, \ldots, L_\lambda$ ambas partes da expressão anterior devem ser colocada na forma inteira para posteriormente igualar os coeficientes das mesmas potências. Também, os coeficientes podem ser encontrados avaliando a expressão anterior em certos valores de x.

Exemplo: Cálcule $I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$?

Neste exemplo $P(x) = x$ e $Q(x) = (x - 1)(x + 1)^2$. Note que o grau de $P(x)$ é menor que o grau de $Q(x)$, se não fosse menor poderia ser aplicado o procedimento de divisão de polinômios. Note também que o grau de $Q(x)$ é 3 e todas suas raizes são reais. Isto é, as raizes de $Q(x)$ são $x = 1$ com multiplicidade 1 e $x = -1$ com multiplicidade 2, logo as três raizes de $Q(x)$ são reais. Sendo assim, podemos fazer a decomposição em frações simples como:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$.

Tomando o denominador comum para colocar a expressão na forma inteira obtemos:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B_1(x-1)(x+1)+B_2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$.

Já que os denominadores são os mesmos, então os numeradores tem que ser iguais:

$$P(x) = x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \tag{1}$$

Para determinar os coeficientes indeterminados A, B_1 e B_2 podemos usar dois procedimentos:

Procedimento 1) desenvolvendo o membro direito de (1) e agrupando as potências iguais de x segue que

$0x^2 + x + 0 = (A + B_1)x^2 + (2A + B_2)x + (A - B_1 - B_2)$.

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x obtemos o seguinte sistema de equações:

$$0 = A + B_1$$
$$1 = 2A + B_2$$
$$0 = A - B_1 - B_2$$

Resolvendo este sistema de três equações com três incognitas encontramos os valores dos coeficientes indeterminados: $A = \frac{1}{4}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$ e $B_2 = \frac{1}{2}$.

Procedimento 2) avaliando a equação (1) em três valores diferentes de x podemos encontrar os coeficientes indeterminados sem precisar resolver o sistema de três equações anterior. Deve ser dito que para facilitar os cálculos os valores de x devem ser escolhidos de forma apropriada.

Fazendo $x = 1$ na equação (1) obtemos $1 = A4$ ou $A = \frac{1}{4}$.

Fazendo $x = -1$ na equação (1) obtemos $-1 = -B_2 2$ ou $B_2 = \frac{1}{2}$.

Fazendo $x = 0$ na equação (1) obtemos $0 = A - B_1 - B_2$ ou $B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}$.

Portanto, a fração pode ser decomposta em frações simples como:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$.

Logo, a integral será decomposta como a soma de três integrais de frações simples que estão tabeladas.

$I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}\right] dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

Estas três integrais são cálculadas facilmente completando o diferencial como

$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)} d(x-1) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)} d(x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2} d(x+1)$

$= \frac{1}{4} ln|x-1| - \frac{1}{4} ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

Método 8 - Integração de funções trigonométricas.

Integrais do tipo $I_{m,n} = \int sen^m(x)cos^n(x)dx$, onde m e n são números inteiros temos três possibilidades.

P1) Qunado um dos dois (m ou n) é positivo e impar podemos completar o diferencial. Suponha que $m = 2k+1$ é impar, então $sen^m(x) = sen^{(2k+1)}(x) = sen^{2k}(x)sen(x)$ e lembrando que $d(cos(x)) = -sen(x)dx$ segue que

$I_{m,n} = \int sen^m(x)cos^n(x)dx = -\int sen^{2k}(x)cos^n(x)d(cos(x)) = -\int[1-cos^2(x)]^k(x)cos^n(x)d(cos(x))$ $= -\int[1-z^2]^k z^n dz$, onde $z = cos(x)$. Esta integral é um polinômio que pode ser integrado facilmente. Analogamente se completa o diferencial quando o impar e positivo é n.

Exemplo: Cálcule $\int sen^{10}(x)cos^3(x)dx$?

Neste exemplo o impar é $n = 3 = 2+1$, logo $cos^3(x) = cos^2(x)cos(x)$ e lembrando que $d(sen(x)) = cos(x)dx$ segue que

$I_{10,3} = \int sen^{10}(x)cos^3(x)dx = \int sen^{10}(x)cos^2(x)d(sen(x)) = \int sen^{10}(x)[1-sen^2(x)]d(sen(x))$ $= \int z^{10}[1-z^2]dz = \int z^{10}dz - \int z^{12}dz = \frac{sen^{11}(x)}{11} - \frac{sen^{13}(x)}{13} + C$, onde $z = sen(x)$.

P2) Qunado os dois (m e n) são positivos e pares podemos usar as três identidades trigonométricas abaixo para transformar a função integrando:

$$sen^2(x) = \frac{1}{2}[1 - cos(2x)],$$
$$cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + cos(2x)],$$
$$sen(x)cos(x) = \frac{1}{2}sen(2x).$$

Exemplo: Cálcule $\int cos^2(3x)sen^4(3x)dx$?

Neste exemplo usando as identidades trigonométricas acimas fazemos as transformações abaixo

$I_{4,2} = \int cos^2(3x)sen^4(3x)dx = \int[cos(3x)sen(3x)]^2 sen^2(3x)dx = \int[\frac{1}{2}sen(6x)]^2\frac{1}{2}[1 - cos(6x)]dx = \frac{1}{8}\int[sen^2(6x) - sen^2(6x)cos(6x)]dx = \frac{1}{8}\Big[\int sen^2(6x)dx - \int sen^2(6x)cos(6x)dx\Big]$ $= \frac{1}{8}\Big[\int \frac{1}{2}[1-cos(12x)]dx - \int sen^2(6x)\frac{1}{6}d(sen(6x))\Big] = \frac{1}{8}\Big[\frac{x}{2} - \frac{sen(12x)}{24} - \frac{sen^3(6x)}{18}\Big] + C.$

P3) Nos casos diferentes dos dois anteriores $I_{m,n}$ é determinada através de formulas de recorrência que surgem da integração por partes.

Exemplo: Sabendo que se $a \neq 0$ da tabela temos $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$, cálcule $I_{0,-3} = \int \frac{1}{cos^3(x)}dx$?

Neste exemplo $m = 0$ e $n = -3$ e não podemos usar P1) e P2). Usaremos identidades trigonométricas e integração por partes.

$\int \frac{1}{cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{cos^3(x)}dx = \int sen(x)\frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx + \int \frac{1}{cos(x)}dx$

A primeira integral podemos resolver usando integração por partes fazendo $u = sen(x)$ e $dv = \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx$. Portanto, $du = cos(x)dx$ e $v = \int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx = -\int \frac{1}{cos^3(x)}d(cos(x)) = \frac{1}{2}\frac{1}{cos^2(x)}$. Substituindo na formula da integração por partes segue:

$\int sen(x)\frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx = sen(x)\frac{1}{2}\frac{1}{cos^2(x)} - \int \frac{1}{2}\frac{cos(x)}{cos^2(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{sen(x)}{cos^2(x)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos(x)}dx$.

A integral que restou da integração por partes é semelhante à segunda integral acima que podemos resolver completando o diferencial.

$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \int \frac{cos(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{1}{[1-sen^2(x)]}d(sen(x)) = \int \frac{1}{1-z^2}dz$ fazendo $z = sen(x)$ e esta integral foi dada no enunciado do exemplo. Portanto,

$\int \frac{1}{cos^3(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{sen(x)}{cos^2(x)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos(x)}dx + \int \frac{1}{cos(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{sen(x)}{cos^2(x)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{sen(x)}{cos^2(x)} + \frac{1}{4}ln|\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}| + C = \frac{1}{2}\frac{sen(x)}{cos^2(x)} + \frac{1}{4}ln|tg(x) + sec(x)| + C$.

Resumindo, apresentamos oitos métodos de integração. Todos estes métodos tentam transformar a integral em questão em outra integral, onde possa ser usada a tabela de integrais ou outro método de integração.

6.3 - Integral definida. Interpretação geométrica da integral definida.

Integral definida como limite de uma soma.

Definição 3 *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$. Seja $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ uma partição ou divisão arbitrária do intervalo em n partes. A soma integral (S_n) de $f(x)$ em $[a, b]$ se define como:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

onde $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$ e $i = 1, \ldots, n$.

Note que a soma integral S_n representa geometricamente a soma/resta das áreas dos correspondentes retângulos ($A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$) como é mostrado na figura abaixo. Estes retângulos tem dentro deles os símbolos (+) e (-) indicando que naqueles acima do eixo x o valor da área é positivo e os abaixo é negativo. Este sinal positivo ou negativo é determinado pelo valor de $f(\xi_i)$.

Definição 4 *Se chama Integral Definida de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ ao limite da soma integral S_n quando o número de divisões do intervalo tende para infinito ($n \to \infty$) e o maior dos Δx_i tende para zero ($\max\{\Delta x_i\} \to 0$). A integral definida também é chamada de Integral de Riemann e se denota por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

onde o intervalo de integração é determinado pelos limites de integração $x = a$ e $x = b$.

Deve ser dito que na definição acima a condição $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ é suficiente para garantir que $n \to \infty$. Isto porque se o maior Δx_i tende para zero, então todos os Δx_i tendem para zero e isto acontece quando o número de partições tende para infinito.

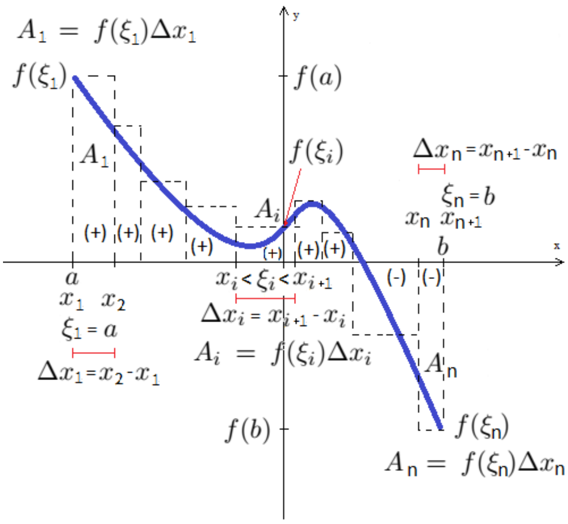

Figure 1: Representação gráfica da soma integral.

A condição que garante a existência da integral de $f(x)$ em $[a,b]$ é que $f(x)$ seja continua em $[a,b]$. Isto é, o limite da soma integral existe independentemente de como o intervalo $[a,b]$ é particionado e de como são escolhidos os ξ_i em cada divisão. Quando a integral existe se diz que a função é integrável em $[a,b]$.

Geometricamente a integral definida corresponde à área que se forma entre o gráfico da função e o eixo x, onde as partes situadas acima do eixo tem sinal positivo e as situadas abaixo tem sinal negativo. Note que o excesso ou defeito de área para cada $A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ tende a zero quando $\max\{\Delta x_i\} \to 0$.

É importante deixar claro que a área é uma grandeza que não pode ser negativa, ou seja, o valor da área só pode ser zero ou positivo, embora o valor da integral possa ser qualquer número real. Em outras palavras, existem grandezas que por definição só podem ser número positivos ou zero: comprimento, área, volume, massa, etc. A integral coincide com a área nos casos em que a função $f(x) \geq 0$ no intervalo de integração $[a,b]$. Nos dois exemplos da figura abaixo vemos esta interpretação geométrica da integral definida.

No primeiro exemplo a função $y = x^2$ é sempre positiva ou zero no intervalo de integração $[0,a]$, logo a área entre o gráfico da função e o eixo x coincide com o valor da integral definida neste intervalo. No segundo exemplo a função $y = sen(x) \geq 0$ no intervalor $[0,\pi]$ e a integral neste intervalo corresponde ao valor da área A_1. Já no intervalo $[\pi, 2\pi]$ a função $y = sen(x) \leq 0$ e a integral neste intervalo é um número negativo que seu valor absoluto coincide com a área A_2. Esta área A_2 é igual a A_1. Por este motivo a integral no intervalo $[0,2\pi]$ é zero, mas a área que se forma entre o $sen(x)$ e o eixo x é $A = A_1 + A_2 = 2A_1 = 4$. No Tópico 7 estudaremos aplicações da integral definida e entre elas teremos como calcular área de figuras planas usando a integral definida.

Exemplo: Usando a definição de integral definida cálcule $\int_a^b (1+x)dx$ no intervalo $[1,10]$?

Note que $f(x) = 1 + x$ é contínua no intervalo, então a integral definida existe neste intervalo. Primeiro fazemos uma partição do intervalo em n partes iguais $\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n} = \frac{9}{n}$.

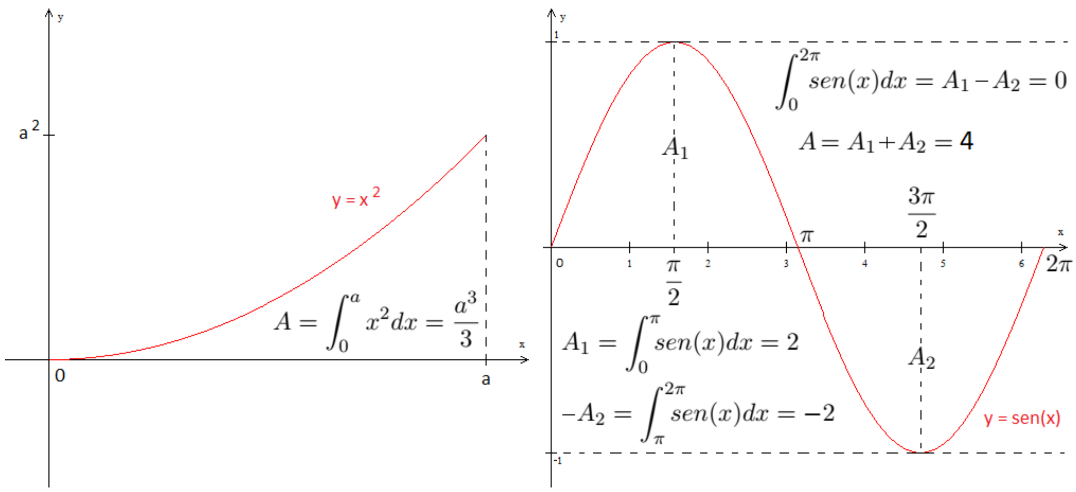

Figure 2: Dois exemplos de integrais definas: $y = x^2$ e $y = sen(x)$.

Agora em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ escolhemos ξ_i como sendo o extremo esquerdo em cada divisão $\xi_i = x_i = 1 + i\Delta x_i = 1 + \frac{9}{n}i$. Logo, $f(\xi_i) = 1 + \xi_i = 2 + \frac{9}{n}i$. Portanto a soma integral será

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(2 + \frac{9}{n}i\Big)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{81}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{18}{n}n + \frac{81}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{117}{2} - \frac{81}{2n}.$$

Agora cálculamos o limite de S_n quando $n \to \infty$.

$$\int_1^{10} (1 + x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{117}{2} - \frac{81}{2n}\Big) = \frac{117}{2}.$$

Cálculo da integral definida através da integral indefinida.

Teorema 2 ***(Integral definida com limite superior variável)*** *Seja $f(t)$ continua em $[a, b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de $f(x)$. Isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.*

Este teorema 2 é usado para provar o teorema fundamental do cálculo ou também chamado de formula de Newton-Leibniz. O teorema fundamental do cálculo junta na mesma expressão a derivada e a integral da função, e permite calcular integrais definidas através da integral indefina. Isto é, não será mais preciso calcular a integral definida construindo a partição e calculando o limite da soma integral como foi feito no exemplo acima.

Teorema 3 ***(Teorema Fundamental do Cálculo)*** *Seja $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

A função primitiva $F(x)$ é determinada através da integral indefinida $\int f(x)dx = F(x) + C$. Isto é, aplicando os oitos métodos de integração e a tabela de integrais. Já que $F'(x) = f(x)$ e $dF(x) = F'(x)dx$ o teorema fundamental do cálculo também pode ser expressado da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Em resume, para calcular uma integral definida é necessário encontrar a primitiva da função e avaliar nos extremos do intervalo de integração. Tão simples quanto isso, onde o maior desafio está em encontrar a primitiva.

Exemplo: Determine $\int_0^a x^2dx$?

Esta integral é o primeiro exemplo da figura 2. Agora enconraremos que $A = \frac{a^3}{3}$. Para calcular a integral definida em questão usaremos o teorema fundamental do cálculo. Portanto, é necessário conhecer uma primitiva de $f(x) = x^2$. Em outras palavras, é necessário calcular $\int x^2dx = F(x) + C$ para encontrar $F(x)$. Usando a tabela de integrais segue que

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C = F(x) + C.$$

Como encontramos a primitiva $F(x) = \frac{x^3}{3}$ podemos usar o teorema fundamental do cálculo.

$$\int_0^a x^2dx = F(x)\Big|_0^a = F(a) - F(0) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{a^3}{3}.$$

Exemplo: Determine $\int_0^{2\pi} sen(x)dx$?

Esta integral é o segundo exemplo da figura 2. Seguiremos o mesmo procedimento feito no exemplo anterior. Primeiro encontrar a primitiva e depois usar o teorema fundamental do cálculo. Da tabela de integrais já sabemos que $\int sen(x)dx = -cos(x) + C$, ou seja, $F(x) = -cos(x)$. Portanto,

$$\int_0^{2\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{2\pi} = [-cos(2\pi)] - [-cos(0)] = [-1] - [-1] = 0.$$

Note que na figura 2 temos $A_1 = \int_0^{\pi} sen(x)dx$ e $-A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)dx$, logo

$$A_1 = \int_0^{\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_0^{\pi} = [-cos(\pi)] - [-cos(0)] = [-(-1)] - [-(1)] = 2.$$

$$-A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)dx = -cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = [-cos(2\pi)] - [-cos(\pi)] = [-(1)] - [-(-1)] = -2.$$

Exemplo: Determine $\int_0^{2\pi} cos(x)dx$?

O procedimento é sempre o mesmo: encontrar a primitiva e usar o teorema fundamental do cálculo.

$$\int_0^{2\pi} cos(x)dx = sen(x)\Big|_0^{2\pi} = [sen(2\pi)] - [sen(0)] = [0] - [0] = 0.$$

6.4 - Principais teoremas para a integral definida.

Agora apresentamos alguns teoremas que descrevem propriedades da integral definida. As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas nos livros de texto de cálculo diferencial e integral.

Teorema 4 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis em $[a,b]$, então a função $[f(x)+g(x)]$ é integrável em $[a,b]$ e se verifica que*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 5 *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a,b]$ e seja k uma constante qualquer, então a função $[kf(x)]$ é integrável em $[a,b]$ e se verifica que*

$$\int_a^b [kf(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 6 *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a,b]$, então é integrável em qualquer intervalo $[c,d]$ contindo em $[a,b]$.*

Teorema 7 *Sejam os números reais $a < c < b$. Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então é integrável em $[a,b]$ e se verifica que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 8 *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Teorema 9 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 10 *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a,b]$, então a função $|f(x)|$ é integrável em $[a,b]$ e se verifica que*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorema 11 ***(Teorema do valor médio)*** *Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ funções contínuas em $[a,b]$ e $\varphi(x) \geq 0$ neste intervalo, então*

$$m \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M \int_a^b \varphi(x)dx,$$

onde m e M são o valor mínimo e máximo absoluto de $f(x)$ em $[a,b]$ respetivamente.

No caso particular que $\varphi(x) = 1$ temos $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b 1dx = x\Big|_a^b = b - a$, e o resultado do teorema se transforma em $m[b-a] \leq \int_a^b f(x)dx \leq M[b-a]$. Este é o resultado que aparece como teorema do valor médio na maioria dos livros de texto. Como consequência do teorema 11 podemos obter os seguintes resultados, onde os números c e ξ pertencem ao intervalo $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)[b-a].$$

Deste último resultado segue que o número $\mu = f(\xi) = \frac{1}{[b-a]} \int_a^b f(x)dx$ é chamado de valor médio da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e isto tem uma interpretação geométrica que pode ser vista na Figura 3. Note que $\int_a^b f(x)dx$ corresponde à área que se forma entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x, já que $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo. A desigualdade do teorema estabelece que essa área é maior que a área do retângulo sombreado de vermelho ($m[b-a]$) e menor que a área do retângulo sombreado de verde ($M[b-a]$). Além disto, existe pelo menos um ponto ξ tal que a área do retângulo abaixo da linha reta azul ($f(\xi)[b-a]$) é igual à área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x.

Prova do Teorema 11: Partimos da hipótese que $f(x)$ é continua em $[a,b]$, m é seu mínimo absoluto em $[a,b]$ e M é seu máximo absoluto em $[a,b]$. Portanto,

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b].$$

Já que $\varphi(x) \geq 0$ neste intervalo, se multiplicamos a desigualdade acima por $\varphi(x)$ obtemos

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Como as três funções desta desigualdade são contínuas em $[a,b]$, então as três são integráveis. Aplicando integral definda no intervalo $[a,b]$ na desigualdade e usando o teorema 9 obtemos

$$\int_a^b m\varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq \int_a^b M\varphi(x)dx.$$

Usando o teorema 5 podemos tirar para fora da integral os números m e M para obtermos

$$m \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M \int_a^b \varphi(x)dx.\square$$

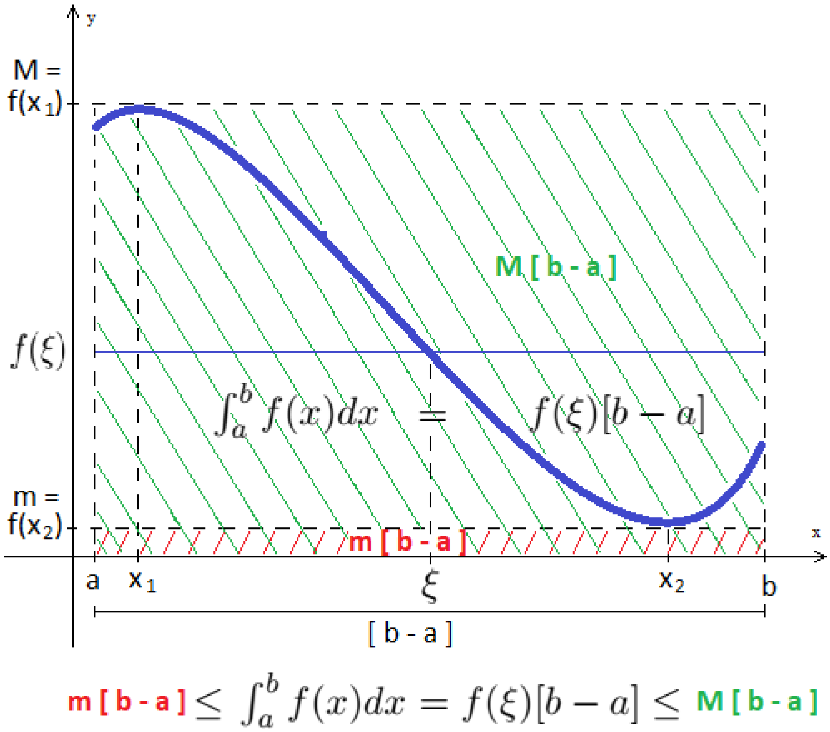

Figure 3: Representação geométrica do teorema do valor médio.

6.5 - Cambio de variável na integral definida. Integração por parte na integral definida.

Cambio de variável na integral definida.

Teorema 12 *Seja $f(x)$ continua em $[a,b]$. Sejam $x = \varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ funções contínuas $\forall t \in [\alpha, \beta]$, onde $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$. Se a função composta $f(\varphi(t))$ é contínua $\forall t \in [\alpha, \beta]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

É impportante reforçar que quando se faz substituição de variável na integral definida o intervalo de integração deve ser modificado conforme a substituição usada. Isto é, o intervalo inicial da variável $x \in [a,b]$ ve ser trocado por $t \in [\alpha, \beta]$.

Exemplo: Determine $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$, onde $a > 0$.

Neste exemplo vamos utilizar o Método 3 de integração para eliminar a raiz quadrada da função integrando. Fazendo a substituição de variável $x = asen(t)$ segue $dx = acos(t)dt$. A função inversa da substituição é $t = arcsen(\frac{x}{a})$ e o novo intervalo de integração será

$\alpha = arcsen(\frac{0}{a}) = 0$ e $\beta = arcsen(\frac{a}{a}) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$. Portanto, quando $x \in [0, a]$ a nova variável $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e usando o teorema 12 obtemos

$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 sen^2(t)\sqrt{a^2 - a^2 sen^2(t)}acos(t)dt = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t)cos^2(t)dt = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [sen(t)cos(t)]^2 dt.$

Esta integral pode ser resolvida usando o Método 8 de integração, onde utilizaremos as seguintes identidades trigonométricas:

i) $sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\{sen[(m+n)x] + sen[(m-n)x]\}$,

ii) $sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\{cos[(m-n)x] - cos[(m+n)x]\}$,

iii) $cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\{cos[(m-n)x] + cos[(m+n)x]\}$.

Usando a primeira identidade segue $sen(t)cos(t) = \frac{1}{2}\{sen[(1+1)t] + sen[(1-1)t]\} = \frac{1}{2}sen(2t)$ e a última integral será

$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [sen(t)cos(t)]^2 dt = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{2}sen(2t)]^2 dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)dt.$

Esta integral pode ser resolvida usando outra substituição de variável ou completando o diferencial. Ambos métodos são parecidos, mas existe uma diferença entre eles. Na substituição de variável é necessário trocar o intervalo de integração. Quando se completa o diferencial o intervalo de integração permanece o mesmo porque a variável não foi substituída. Vamos resolver a última integral pelos dois métodos de integração.

Usando outra substituição de variável em $\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)dt$. Podemos fazer $z = 2t$, logo $dz = 2dt$ e o novo intervalo de integração será $z \in [0, \pi]$ porque quando $t = 0$, $z = 2 \cdot 0 = 0$ e quando $t = \frac{\pi}{2}$, $z = 2\frac{\pi}{2} = \pi$. Vamos precisar usar a segunda identidade trigonométrica para obter $sen(z)sen(z) = \frac{1}{2}\{cos[(1-1)z] - cos[(1+1)z]\} = \frac{1}{2}[1 - cos(2z)]$. Portanto,

$\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi} sen^2(z)\frac{1}{2}dz = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1 - cos(2z)]dz = \frac{a^4}{16}\left[\int_0^{\pi} 1dz - \int_0^{\pi} cos(2z)dz\right] = \frac{a^4}{16}\left[z\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} cos(2z)dz\right] = \frac{a^4}{16}\left[(\pi - 0) - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos(u)du\right] = \frac{a^4}{16}\left[\pi - \frac{1}{2}sen(u)\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{a^4}{16}[\pi - \frac{1}{2}\{sen(2\pi) - sen(2\pi)\}] = \frac{a^4}{16}\pi.$

Na última integral foi necessário fazer outra substituição de variável $u = 2z$ com $du = 2dz$ e o novo intervalo de integração $u \in [0, 2\pi]$.

Completanto o diferencial em $\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)dt$ não é necessário trocar o intervalo de integração porque a variável não foi trocada. Logo,

$\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)\frac{2}{2}dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(2t)d(2t) = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1 - cos(2(2t))]d(2t) = \frac{a^4}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - cos(4t)]d(2t) = \frac{a^4}{16}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d(2t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(4t)d(2t)\right] = \frac{a^4}{16}\left[2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(4t)\frac{2}{2}d(2t)\right] = \frac{a^4}{16}\left[(2\frac{\pi}{2}) - (2\cdot 0) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(4t)d(4t)\right] = \frac{a^4}{16}\left[\pi - \frac{1}{2}sen(4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{a^4}{16}[\pi - \frac{1}{2}\{sen(4\frac{\pi}{2}) - sen(4\cdot 0)\}] = \frac{a^4}{16}\pi.$

Note que, sempre que não houver erro de cálculo, o resultado é o mesmo independentemente de qual foi o método de integração usado.

Integração por parte na integral definida.

Teorema 13 *Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ e suas derivas são contínuas em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Exemplo: Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos(x)dx$?

Na integração por parte é importante fazer a escolha apropriada de u e dv. Neste exemplo temos o polinômio x e a função trigonométrica $cos(x)$. Sabemos que as derivadas e integrais das funções seno e coseno são cíclicas. Também sabemos que quando derivamos um polinômio diminuímos em uma unidade seu grau, porém se integramos o polinômio aumentamos em uma unidade seu grau. Considerando o acimo exposto, então devemos escolher $u(x) = x$ para que quando derivemos possamos eliminar o polinômio, já que $u'(x) = (x)' = 1$. Logo, $dv = cos(x)dx$ e $v = \int cos(x)dx = sen(x)$. Portanto, usando o teorema 13 obtemos:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos(x)dx = xsen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = [\frac{\pi}{2}sen(\frac{\pi}{2}) - 0sen(0)] - [-cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + [cos(\frac{\pi}{2}) - cos(0)] = \frac{\pi}{2} - 1.$

Este exemplo indica que para calcular a integral do produto de um polinômio vezes uma função seno ou coseno devemos usar integração por partes tantas vezes seja necessário até eliminarmos o polinômio. Isto é, na integral $\int p_n(x)sen(x)dx$ ou $\int p_n(x)sen(x)dx$ sempre devemos escolher para derivar o polinômio ($u = p_n(x)$) e para integrar a função trigonométrica (dv). A integração por parte deve ser aplicada n vezes até eliminar o polinômio.

Exemplo: Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx$?

Este é outro exemplo típico de integração por partes. Neste exemplo temos a função exponêncial e^x e a função trigonométrica $sen(x)$. As derivadas e integrais das funções seno e exponêncial são cíclicas. Por este motivo qualquer uma pode ser escolhida como u e a outra como dv. O importante neste tipo de exemplo é realizar a integração por partes duas vezes sempre mantendo a mesma escolha de u e dv. Considerando o acimo exposto, vamos escolher $u(x) = e^x$ e $dv = sen(x)dx$. Logo, $u'(x) = (e^x)' = e^x$ e $v = \int sen(x)dx = -cos(x)$. Portanto, usando o teorema 13 obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx = -e^x cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^x cos(x)dx = -e^x cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)dx.$$

Agora para a integral da direita voltamos a usar o teorema 13 mantendo a escolha $u(x) = e^x$ e $dv = cos(x)dx$. Logo, $u'(x) = (e^x)' = e^x$, $v = \int cos(x)dx = sen(x)$ e obtemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)dx = e^x sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx.$$

Substituindo este resultado na integral de cima temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx = -e^x cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)dx = e^x[sen(x) - cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx.$$

Note que a integral da direita é a mesma que a da questão original. Agora juntamos elas do lado esquerdo para obtermos

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx = e^x[sen(x) - cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx = \frac{1}{2}e^x[sen(x) - cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Finalmente só falta avaliar as funções nos extremos do intervalo. Logo,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sen(x)dx = \frac{1}{2}e^x[sen(x) - cos(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\{e^{\frac{\pi}{2}}[sen(\frac{\pi}{2}) - cos(\frac{\pi}{2})] - e^0[sen(0) - cos(0)]\} = \frac{1}{2}\{e^{\frac{\pi}{2}} + 1\}$.

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.

2- Serge Lang, Cálculo, V1.

3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.

4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.

5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.

6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.

7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.

9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.

10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.

11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.