NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 3- Limites de Funções.

3.1 - Definição de Seqüências. Limite de seqüências. Representação de números reais por seqüências de números racionais. Teorema do confronto. Indeterminações.

3.2 - Limites de funções. Limites laterais. Infinitésimos e Infinitos. Teoremas sobre limites. Indeterminações.

3.3 - Métodos para resolver limites indeterminados.

3.1 - Definição de Seqüências. Limite de seqüências. Representação de números reais por seqüências de números racionais. Teorema do confronto. Indeterminações.

Vizinhança, ponto de acumulação e o teorema de Bolzano-Weierstrass.

O primeiro conceito que devemos definir é o de vizinhança, vecindade ou entorno de um ponto, que nos diz o quão perto estamos do ponto em questão.

Definição 1 *Sejam* ϵ *e* x_o *dois números reais,* $\epsilon > 0$. *Chamamos vizinhança de* x_o *com raio* ϵ *ao intervalo aberto* $(x_o - \epsilon, x_o + \epsilon)$, *que é denotado por* $V(x_o, \epsilon)$ *e o ponto* x_o *é chamado de centro da vizinhança.*

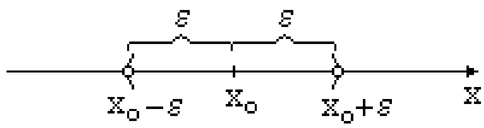

Figure 1: Representação gráfica da vizinhança de x_o com raio ϵ.

Note que usando a definição de valor absoluto podemos expressar a vizinhança em notação de conjunto como $V(x_o, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_o| < \epsilon\}$, já que a solução da desigualdade $|x - x_o| < \epsilon$ é o intervalo aberto $x \in (x_o - \epsilon, x_o + \epsilon)$. Veja a representação gráfica na Figura 2.

Definição 2 *Seja* S *um conjunto de números reais. Dizemos que* x_o *é um ponto de acumulação de* S, *se toda vizinhança* $V(x_o, \epsilon)$ *contem, ao menos, um ponto de* S *diferente de* x_o.

Note que da definição de ponto de acumulação, o ponto x_o não necessariamente pertece a S. Veja dois exemplos gráficos na Figura 3.

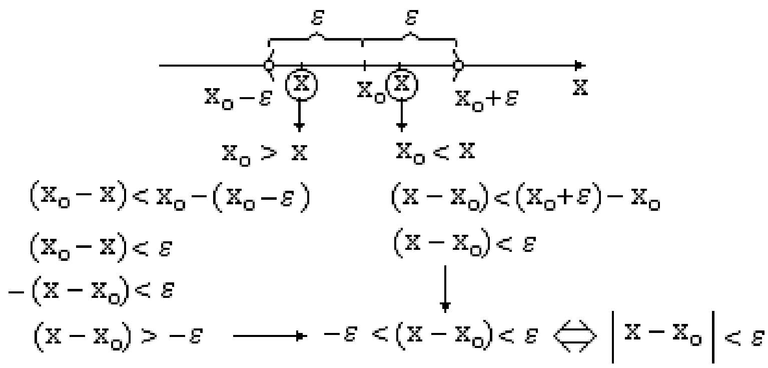

Figure 2: Representação da vizinhança em notação de conjunto.

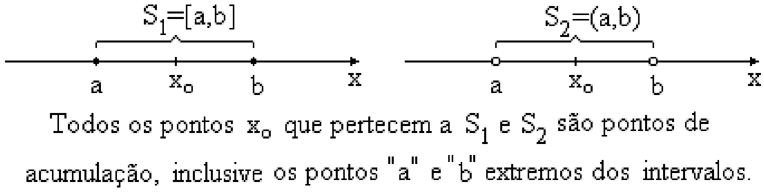

Figure 3: Representação gráfica do ponto de acumulação.

Teorema 1 *Seja S um conjunto de números reais. Se x_0 é um ponto de acumulação de S, então toda vizinhança $V(x_0, \epsilon)$ contem uma infinidade de pontos de S.*

Prova: Suponha o contrario, isto é, que existe uma vizinhança $V(x_0, \epsilon)$ que contenha somente um número finito de pontos de S, diferentes de x_0. Sejam estes pontos x_1, x_2, x_3, ..., x_n e denotemos por ϵ o menor dos números positivos $|x_0 - x_1| = \epsilon_1$, $|x_0 - x_2| = \epsilon_2$, ..., $|x_0 - x_n| = \epsilon_n$. Então, $V(x_0, \epsilon)$ será uma vizinhança de x_0 que não contem pontos de S diferentes de x_0, o qual é uma contradição porque x_0 é um ponto de acumulação.$\square$

Note que pelo teorema um conjunto que não tenha infinitos pontos, não pode ter ponto de acumulação. A reciproca não é verdadeira. Por exemplo, o conjunto dos números naturais possue infinitos pontos, mas não tem ponto de acumulação. Por isto, o enunciado do teorema não diz "se e somente se". O teorema afirma que x_0 é um ponto de acumulação de S somente se toda vizinhança de x_0 contem uma infinidade de pontos em S. Ou seja, a condição de que o cojunto tenha infinitos elementos é necessaria para que o mesmo possua ponto de acumulação, mas não garante (não é suficiente) que exista o ponto de acumulação. Agora veremos que se um conjunto infinito (condição necessaria) é limitado, então necessariamente tem um ponto de acumulação.

Teorema 2 ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Se um conjunto limitado S em $\mathbb{R}$ contem infinitos pontos, então existe ao menos um ponto de $\mathbb{R}$ que é ponto de acumulação de S.*

Exemplo: $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto S tem infinitos elementos. Também, S é limitado porque $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, satisfaz as duas condições do Teorema 2, logo tem que ter pelo menos um ponto de acumulação. Particularmente, este conjunto só tem um único ponto de acumulação que é $x_0 = 0$. Note que o ponto de acumulação $x_0 = 0$ não pertence ao conjunto S.

Sequência. Limite de sequência. Indeterminações de limites de sequência.

Definição 3 *Se a cada número natural n associamos um número real x_n através de uma determinada relação, então chamamos de sucesão ou sequência ao conjunto dos números reais ordenados x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Também denotado pelo simbolo $\{x_n\}$.*

A sequência ou sucessão é a função mais antiga que conhecemos, e a notação usada historicamente se manteve $\{x_n\}$. Agora veremos o conceito de sucesão convergente e limite da suceção.

Definição 4 ***(Limite de sequência)*** *O número real l recebe o nome de limite da sucessão de números x_1, x_2, x_3, ... denotado por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, se para qualquer $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) existe um número natural $N = N(\epsilon)$, tal que $|x_n - l| < \epsilon$ para todo $n > N$.*

Se a sucessão $\{x_n\}$ tem limite se diz que é convengente. Se uma sucessão $\{x_n\}$ não tem limite não é convergente, e se diz que é divergente. A notação $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ lê-se como limite de x_n quando n tende ao infinito é igual a l.

Note que o conceito de limite pode ser colocado em termos de vizinhança e ponto de acumulação. Isto é, a sequência tem limite l se para toda vizinhança existe um natural $N = N(\epsilon)$, tal que todos os elementos da sequência com $n > N(\epsilon)$ pertencem à vizinhança. Em outras palavras, o limite l da sequência é seu ponto de acumulação.

Exemplo: A sequência $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ é convergente, e seu limite é $l = 0$. Isto porque $|x_n - l| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|$. Exigir que $|x_n - l| < \epsilon$ implica em que $\frac{1}{n} < \epsilon$ ou $n > \frac{1}{\epsilon}$. Portanto, o ponto de acumulação é $l = 0$.

Se $\{x_n\}$ é arbitrariamente grande com sinal positivo (negativo) quando $n \to \infty$, simbolicamente é representado por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty(-\infty)$. Nestes casos a sequência é divergente.

Exemplo: Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Considere a diferença $\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$. Se tomamos o valor absoluto desta igualdade temos $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}$. Considerando que $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = N(\epsilon)$, então para cada número positivo ϵ podemos encontrar um número $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$, tal que para todo natural $n > N$ se verifica a desigualdade $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \epsilon$. Portanto, o número 2 é o limite da sucesão $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Teorema 3 *O limite de uma sequência convergente $\{x_n\}$ é unico.*

Teorema 4 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências convergentes. Então se verifica as seguintes propriedades:*

i) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$,

ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$,

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, *se* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

No caso que as sequências sejam divergentes, uma ou as duas, as propriedades aritmeticas anteriores não são validas. Estes dois teoremas serão de crucial importância para calcular limites.

Exemplo: Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}$ usando o Teorema 4 e sabendo que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.
Para poder usar o teorema devemos decompor a sequência $\{\frac{2n+1}{n+1}\}$ em partes que contenham a sequência $\{\frac{1}{n}\}$. Para fazer estas manipulações algébricas é importante ter estudado o Tópico 1 e ganhar alguma habilidade. Note que $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n(2+1/n)}{n(1+1/n)} = \frac{(2+1/n)}{(1+1/n)}$. Logo
$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2+1/n)}{(1+1/n)} = \frac{(2+0)}{(1+0)} = 2$ se usamos o Teorema 4.

Tipos de indeterminações para limites.

1- Tipo $(\infty - \infty)$. Exemplos:
a) Se $x_n = n+1$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 1$.
b) Se $x_n = 2n$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty$.
c) Se $x_n = n + (-1)^{n+1}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$, que não tem limite ($+1$ se n é impar e -1 se n é par).
Estes três casos mostram que a diferença entre duas sucesões divergentes pode ser convergente ou divergente. Nestes casos dizemos que $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)$ apresenta uma indeterminação do tipo $(\infty - \infty)$.

2- Tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Exemplos:
a) Se $x_n = n$ e $y_n = n^2$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.
b) Se $x_n = n^2$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.
c) Se $x_n = an$ $(a > 0)$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} a = a$.
Estes três casos mostram que o cociente de duas sucesões divergentes pode ser convergente ou divergente. Nestes casos dizemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$.

3- Tipo $(\mathbf{0}\cdot\infty)$. Exemplos:
a) Se $x_n = \frac{1}{n^2}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.
b) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.
c) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$.
Aqui o produto de sucesaõ convergente a zero e outra divergente pode convergir ou divergir. Neste caso dizemos que temos uma indeterminação do tipo $(0\cdot\infty)$.

4- Tipo $(\frac{0}{0})$. Exemplos:

a) Se $x_n = \frac{1}{n^2}$ e $y_n = \frac{1}{n}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n^2}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

c) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = (-\frac{1}{n})^n$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\frac{x_n}{y_n} = n^{(n-1)}(-1)^n$, que não possue limite.

Nestes casos o cociente de sucesões convergentes a zero pode convergir ou divergir. Esta indeterminação é do tipo $(\frac{0}{0})$.

A seguir apresentamos sem prova uma propriedade dos números reais.

Teorema 5 ***(Propriedade)*** *Todo número real pode ser expressado como sendo o limite de uma sucesão de números racionais.*

5- Tipo 1^∞. Exemplos:

O número $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71828182845....$ Este número é irracional e trascendental, ou seja, não é raiz de nenhuma equação algebrica com coeficientes inteiros.

Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.

Teorema 6 ***(Bolzano-Cauchy)*** *Uma sucesão $\{x_n\}$ tem limite finito se e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um natural N tal que a desigualdade $|x_n - x_m| < \epsilon$ é verificada sempre que $n \geqslant N$ e $m \geqslant N$.*

Note que neste criterio de convergencia não é necessario conhecer o limite l da sucesão $\{x_n\}$.

Teorema 7 ***(Limite em igualdades)*** *Se dois sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são tais que $x_n = y_n$ para quase todo n (todo n exceto um número finito de termos ou elementos), e se $\{x_n\}$ é convergente (possue limite finito), então $\{y_n\}$ é convergente e os limites são iguais: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Teorema 8 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dois sequências convergentes. Se $x_n \geqslant y_n$ para quase todo n e se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então $a \geqslant b$.*

Teorema 9 ***(Confronto ou Sanduiche)*** *Se as sequências $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ são tais que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para quase todo n e se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, então a sequência $\{y_n\}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

Exemplo: Seja $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+j}}$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Como $\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ segue que $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \sum\limits_{j=1}^{n} 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$. Logo temos que $x_n \leqslant y_n$ para quase todo n. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$. Por outra parte temos que como $\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \leqslant$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ segue que $y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sum_{j=1}^{n} 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$. Logo temos que $y_n \leqslant z_n$ para quase todo n. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$. Então temos duas sequências $\{x_n\}$ e $\{z_n\}$ são tais que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ para quase todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, logo aplicando o teorema do confronto obtemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

3.2 - Limites de funções. Limites laterais. Infinitésimos e Infinitos. Teoremas sobre limites. Indeterminações.

Definição 5 ***(Limite de uma função segundo Heine)*** *Seja $f(x)$ uma função real definida em X e seja a ponto de acumulação de X. Dizemos que o número l é o limite da função f quando x tende a a, se para toda sucesão $\{x_n\}$,tal que $x_n \in X$, $x_n \to a$ e $x_n \neq a$, $n = 1, 2, ...$, a sucesão de números $\{f(x_n)\}$ converge ao número l, isto é, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*

Note que não faz sentido achar o limite de uma função num ponto que não seja de acumulação do domínio de definição de f. Também, o limite da função f no ponto a não depende da sucesão $\{x_n\}$ eleita, ou seja, qualquera que seja a sucesão $\{x_n\}$ que cumpre com as condições da definição de limite a sucesão $\{f(x_n)\}$ é covergente e seu limite é o mesmo. Para provar que uma função $f(x)$ não possue limite quando $x \to a$, basta encontrar uma sucesão $\{x_n\}$ que verifique as condições da definição de limite e tal que não seja convergente, ou então duas sucesões $\{x_n\}$ e $\{\overline{x}_n\}$ tais que $\{f(x_n)\}$ e $\{f(\overline{x}_n)\}$ converjam a limites diferentes.

Exemplo: Seja $f(x) = sen(\frac{1}{x})$. Seu gráfico pode ser esbozado como:

Qual será o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Intuitivamente podemos pensar que não deve existir este limite, uma vez que ao nos aproximar mais e mais do ponto $x = 0$, a frequencia da oscilação aumenta de forma tal que nos dificulta dizer qual deve ser o valor no limite. Para provar nossa intuição escolha duas sucesões convergentes ao número zero e tal que tenham limites diferentes: $x_n = \frac{1}{\pi n}$ e $\overline{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ para $n = 1, 2, 3, ...$. Estas duas sucesões verificam que: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = 0$ e $x_n \neq 0$, $\overline{x}_n \neq 0$ para $n = 1, 2, 3, ...$. Além disto temos,

$f(x_n) = sen(\pi n) = 0$ se $n = 1, 2, 3, ...$

$f(\overline{x}_n) = sen(\frac{\pi}{2}) = 1$ se $n = 1, 2, 3, ...$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}_n) = 1$, consequentemente $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

A partir desta definição de limite de uma função podemos deduzir as propriedades aritmeticas para o limite de funções num ponto através das propriedades do limite das sucesões.

Teorema 10 *Se existem os $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, então:*

i) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

ii) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

iii) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, *sempre que* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

iv) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, *sempre que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.

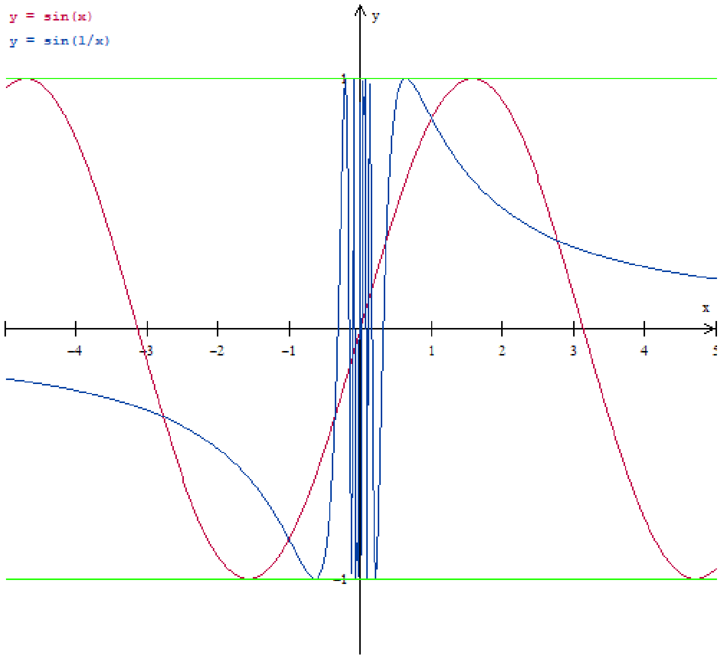

Figure 4: Representação gráfica das funções $sen(x)$ e $sen(\frac{1}{x})$.

Limites laterais.

Definição 6 *Se $x < a$ e $x \to a$, é denotado por $x \to a^-$, significando que x tende ao número a pela esquerda. Similarmente, se $x > a$ e $x \to a$, é denotado por $x \to a^+$, significando que x tende ao número a pela direita.*

Definição 7 *Nós chamamos respetivamente de limites laterais pela esquerda e pela direita da função $f(x)$ no ponto a, os números denotados por $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$, sempre que estes números existam.*

Teorema 11 *A função $f(x)$ possue limite quando $x \to a$, se e somente se, existem os limites laterais no ponto a, e eles são iguais. Isto é: $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$.*

Exemplo: $y = sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$.

Esta função é chamada de sinal de x e seu gráfico pode ser visto na Figura 5. Para mostrar que não existe o limite quando x tende para zero usaremos o teorema anterior. Isto é, mostraremos que os limites laterais existem, mas são diferentes. Para isto encontraremos duas sequências no domínio que se aproximam de zero: x_n pelo lado direito de zero e $\overline{x}_n$ pelo lado esquerdo de zero. Depois será mostrado que os limites das sequências imagens são diferentes.

Sejam $x_n > 0$ e $\overline{x}_n < 0$, $n = 1, 2, 3, ...$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} sgn(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} sgn(\overline{x}_n) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$. Isto significa que $\lim_{x\to 0^+} sgn(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} sgn(x) = -1$. Neste caso, a função não possue limite no ponto $x = 0$, e dizemos que a mesma apresenta um salto determinado por $\left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right| = d$.

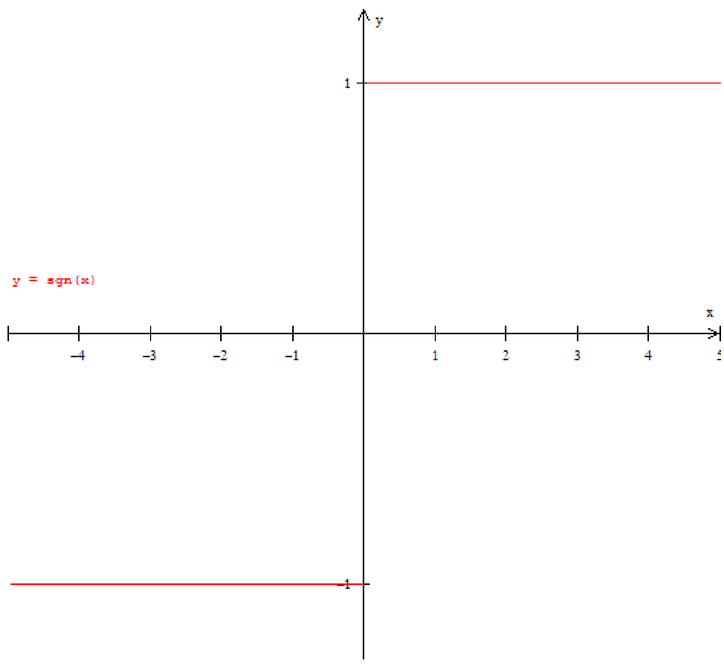

Figure 5: Representação gráfica da função $sgn(x)$.

Definição 8 ***(Limite de uma função segundo Cauchy)*** *Dizemos que uma função $f(x)$ tende ao número l ($f(x) \to l$) quando x tende ao número a ($x \to a$), denotado por $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, se para qualquer $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) existe um número real $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.*

Note que pela definição l é limite de f quando $x \to a$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se x pertece a vizinhança $V(a, \delta)$, então o valor da função neste ponto pertece a vizinhança $V(l, \epsilon)$. Isto pode ser visto geometricamente como:

Exemplo: Usando a definição de limite segundo Cauchy prove que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Pela definição, $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 3| < \delta$ então $\left|x^2 - 9\right| < \epsilon$. Como $\left|x^2 - 9\right| = |x - 3|\,|x + 3|$, suponha agora que $|x - 3| < \delta$, então pela desigualdade triangular $\left|x^2 - 9\right| \leqslant |x - 3|\,(|x| + |3|) < \delta(|x| + |3|)$. Como $|x - 3| < \delta$ então $-\delta < x - 3 < \delta$ e consequentemente $3 - \delta < x < \delta + 3$. Como o número $3 - \delta > -(\delta + 3)$ então temos $-(\delta + 3) < x < (\delta + 3)$ e consequentemente $|x| < \delta + 3$, portanto $\left|x^2 - 9\right| < \delta(\delta + 6)$.

Para que $\delta(\delta + 6) < \epsilon$ basta que $\delta < \sqrt{\epsilon + 9} - 3$, já que $\delta(\delta + 6) < (\sqrt{\epsilon + 9} - 3)(\sqrt{\epsilon + 9} + 3) = (\epsilon + 9) - 9 = \epsilon$. Assim, temos provado que pata todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \sqrt{\epsilon + 9} - 3$, tal que se $|x - 3| < \delta$, então $\left|x^2 - 9\right| < \epsilon$, isto é, $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Similarmente, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, se $|f(x) - A| < \epsilon$ para $|x| > N(\epsilon)$.

Também encontramos a seguinte notação $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, que significa, que $|f(x)| > E$ se $0 < |x - a| < \delta(E)$, onde E representa um número positivo arbitrario.

O criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy também existe para as funções reais.

Teorema 12 ***(Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy)*** *Uma função f tem limite finito quando $x \to a$, se e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que se $\hat{x}, \overline{x} \in Domf$ e $|\overline{x} - \hat{x}| < \delta$ então $|f(\overline{x}) - f(\hat{x})| < \epsilon$.*

3.3 - Métodos para resolver limites indeterminados.

Infinitesimos e infinitos.

Definição 9 *Se $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, ou seja, se $|\alpha(x)| < \epsilon$, quando $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$, a função $\alpha(x)$ é chamada de infinitesima ou infinitamente pequena quando $x \to a$.*

Similarmente é definda a função infinitesima quando $x \to \infty$.

Algumas propriedades para as funções infinitesimas.

P1) A soma e o produto de um número finito de infinitesimos, quando $x \to a$, também é um infinitesimo quando $x \to a$. Isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \beta(x), \tag{1}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \gamma(x). \tag{2}$$

P2) Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são infinitesimas quando $x \to a$ e $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, onde C é um número diferente de zero, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são chamadas de infinitesismas da mesma ordem. Se $C = 0$, dizemos que a função $\alpha(x)$ é uma infinitesima de ordem superior a $\beta(x)$.

A função $\alpha(x)$ é dita ser infinitesima de ordem n respeto à função $\beta(x)$ se $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C$, onde $0 < |C| < +\infty$.

Se $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são ditas ser equivalentes quando $x \to a$, ou seja, $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Exemplo: $sen(x) \sim x$ quando $x \to 0$.

Usando as propriedades das funções trigonométricas temos:

$$0 < sen(x) < x < tg(x) \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \tag{3}$$

Como neste intervalo $sen(x) \neq 0$ podemos dividir por ele, e sabendo que neste intervalo $sen(x) > 0$ segue

$$\frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tg(x)}{sen(x)} \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ ou} \tag{4}$$

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)} \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \tag{5}$$

Note que as funções 1, $\frac{x}{sen(x)}$ e $\frac{1}{cos(x)}$ são pares, ou seja, $f(x) = f(-x)$. Portanto, a desigualdade vale também para o ntervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Sabendo que $\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} cos(x) = 1$ e que a função $\frac{x}{sen(x)}$ é limitada segue:

$$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)} \text{ ou} \tag{6}$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} < 1. \tag{7}$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} = 1$. O mesmo resultado é obtido para $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$. Portanto, as funções $sen(x)$ e x são equivalentes quando $x \to 0$. Na Figura 6 pode ser visto que quando estamos perto de $x = 0$ os gráficos das funções $sen(x)$ e x são muito próximos.

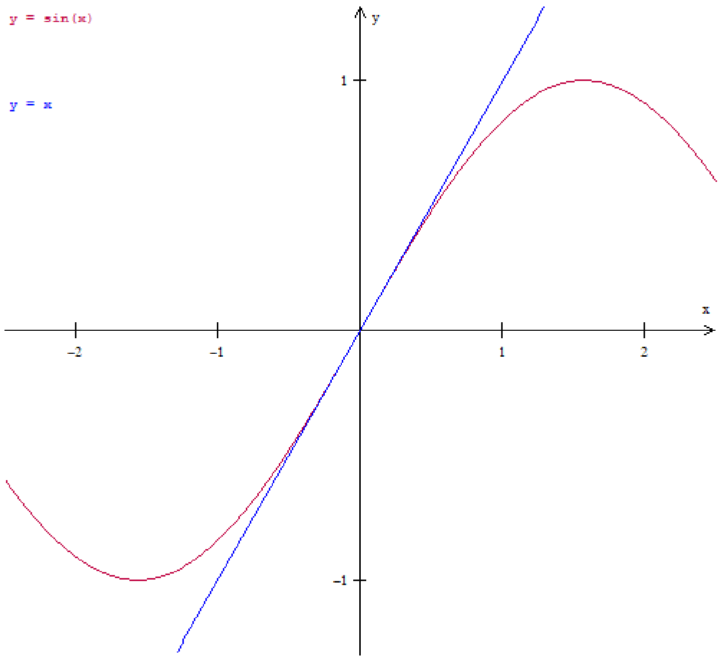

Figure 6: Representação gráfica das funções $sen(x)$ e x.

Exemplo: $ln(1 + x) \sim x$ quando $x \to 0$. O cálculo deste exemplo será feito mais adiante. Aqui vamos mostrar apenas a representação gráfica. Na Figura 7 pode ser visto que quando estamos perto de $x = 0$ os gráficos das funções $ln(1+x)$ e x são muito próximos.

P3) A soma de dois infinitesimos de ordem diferentes, equivale ao somando cujo ordem é inferior.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x^3) = \lim\limits_{x\to 0} x^2$. Isto é, $(x^2 + x^3) \sim x^2$ quando $x \to 0$, já que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+x^3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(x^2+x^3)} = 1$.

P4) O limite da razão de dois infinitesimos não se altera, se seus termos são subtituidos por outros cujos valores respetivos sejam equivalentes.

Segundo esta propriedade ao determinar o limite da fração $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, onde $\alpha(x) \to 0$ e $\beta(x) \to 0$, quando $x \to a$, podemos somar (subtrair) ao numerador e denominador da fração infinitesismos de ordem superior, de forma tal que, as quantidades resultantes sejam equivalentes às anteriores.

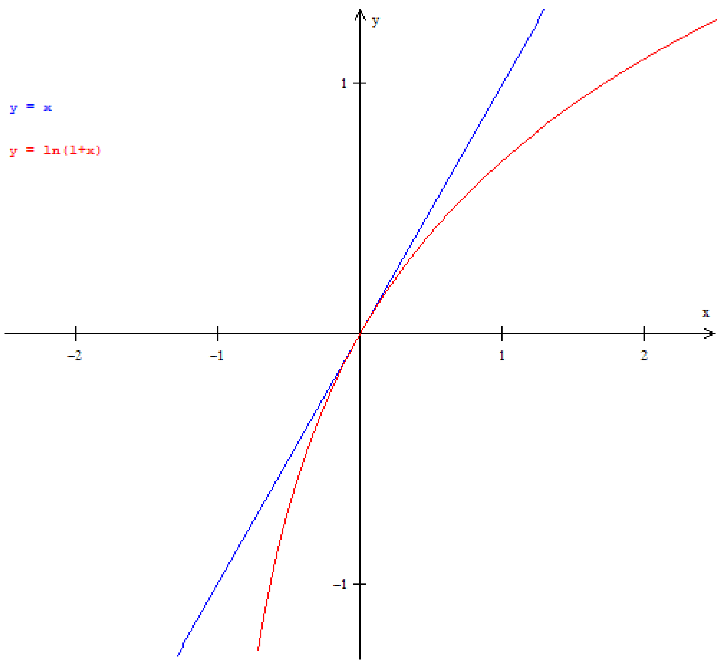

Figure 7: Representação gráfica das funções $ln(1+x)$ e x.

Exemplo: Determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$.

Note $x^3+2x^4 \sim x^3$ quando $x\to 0$, e $\ln(1+2x)\sim 2x$ quando $x\to 0$. Logo, usando a P4 segue:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}$.

Infinitos.

Definição 10 *Se para um número qualquer N, tão grande como se quera, existe um $\delta(N)$, tal que para $0<|x-a|<\delta(N)$ é verificada a desigualdade $|f(x)|>N$, então a função $f(x)$ é chamada de infinita ou infinitamente grande quando $x\to a$.*

De forma semelhante se define $f(x)$ como infinita quando $x\to\infty$. O conceito de infinitos de varias ordens é definido de maneira analoga a como foi feito para os infinitesimos.

A seguir alguns exemplos de limites que aparecem com muita frequencia e dicas para calcular limites de funções.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} = 1$,

$\lim\limits_{x\to a} sen(x) = sen(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x) = \cos(a)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e = 2,718...$. Este número é um exemplo de número irracional, chamado de número de Neper, e denotado pela letra e.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1$.

Indeterminações do Tipo $(\frac{\infty}{\infty})$.

Muitas vezes quando precissamos determinar o limite da ração de dois polinomios inteiros respeto a x (as potencias de x são números inteiros), quando $x \to \infty$, é conveniente dividir os dois polinomios pela maior potencia destes polinomios. Também, quando se tem uma fração de expressões irracionais podemos usar um procedimento analogo.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{x})(3+\frac{5}{x})(4-\frac{6}{x})}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})(3+\frac{5}{x})(4-\frac{6}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})} = \frac{2*3*4}{3} = 8$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = 1$.

Indeterminações do Tipo $(\frac{0}{0})$.

Quando os polinomios inteiros $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que no ponto $x = a$, $P(a) \neq 0$ e $Q(a) \neq 0$ não existe indeterminação, então o limite da fração racional $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ é calculado de forma direta. No caso que no ponto $x = a, P(a) = Q(a) = 0$, existe a indeterminação e é conveniente simplificar a fração $\frac{P(x)}{Q(x)}$, pelo binomio $(x-a)$, uma ou varias vezes.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4$.

As expressões irracionais podem ser reducidas muitas vezes, a uma forma racional introduzindo um cambio de variavel.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Introduzindo ou definindo $1 + x = y^6$ temos $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$.

Outro procedimento muito útil na hora de determinar o limite de uma expressão irracional, consiste em trasladar a parte irracional do numerador para o denominador, ou então, ao contrario, do denominador para o numerador.

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$.

Indeterminações do Tipo 1^∞.

Para determinar limites de expressões que possuem a forma $(\varphi(x))^{\psi(x)}$, onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são duas funções reais. Devemos considerar que : $\lim\limits_{x\to a} (\varphi(x))^{\psi(x)} = C$:

1) Se existem os limites $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ e $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = B$, onde A e B são dois números reais finitos, então não existe indeterminação e o limite se determina de forma direta $C = A^B$.

Exemplo: Determinar $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sen(2x)}{x}\right)^{1+x}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sen(2x)}{x}\right) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$, portanto $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sen(2x)}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2$.

2) Se $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$ existe a indeterminação, e podemos supor que $\varphi(x) = 1+\alpha(x)$, onde $\alpha(x) \to 0$, quando $x \to a$ e consequentemente, $C = \lim\limits_{x\to a} \left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} (\varphi(x)-1)\psi(x)}$. Desta forma trocamos a indeterminação Tipo 1^∞ por outra Tipo $(\mathbf{0} \cdot \infty)$.

Exemplo: Determinar $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 1$. Fazendo as transformações do item 2) teremos
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+(\frac{x-1}{x+1}-1)\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+(-\frac{2}{x+1})\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2x}{1+x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} =$
e^{-2}.

Neste caso em particular, o limite pode ser determinado por outro caminho da seguinte forma.
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\frac{1}{x})^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$.

3) Se $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ e $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \pm\infty$, então não existe indeterminação e o limite $e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)-1)\psi(x)}$ se determina de forma direta.

Exemplo: Determinar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$.
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, portanto $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0$.

Resulta muito conveniente lembrar sempre que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$, onde k é um número real fixo.

Também, é muito util lembrar na hora de determinar certos limites, que se existe e é positivo o $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a}(\ln f(x)) = \ln\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)$.

Exemplo: Determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = \log_e e = 1$. Este cálculo prova que $ln(1+x) \sim x$ quando $x \to 0$.

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.
2- Serge Lang, Cálculo, V1.
3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.
4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.
5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.
6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.
7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.
8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.
9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.
10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.
11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.