NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 5- Cálculo Diferencial.

5.1 - Definição de derivadas. Derivadas laterais. Diferencial de uma função. Diferenciabilidade de funções. Cálculo de derivadas usando a definição. Obtenção de uma tabela básica de derivadas. Propriedades de derivadas. Regra da cadeia. Derivada da função implícita, inversa, paramétrica. Derivada logarítmica.

5.2 - Derivadas e diferenciais de ordem superior. Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

5.3 - Máximos e mínimos locais e globais. Esboço de gráficos. Regra de L'Hospital - Bernoulli. Séries de Taylor e McLawrin.

5.1 - Definição de derivadas. Derivadas laterais. Diferencial de uma função. Diferenciabilidade de funções. Cálculo de derivadas usando a definição. Obtenção de uma tabela básica de derivadas. Propriedades de derivadas. Regra da cadeia. Derivada da função implícita, inversa, paramétrica. Derivada logarítmica.

Derivada de uma função num ponto.

Seja $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b) e x_o um ponto deste intervalo. Denotemos por $\Delta x = x - x_o$ um incremento do argumento da função tal que o ponto $x_o + \Delta x \in (a, b)$. Então o incremento correspondente da função será: $\Delta y = y(x) - y_o = f(x) - f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$. E se $\Delta x \neq 0$ podemos definir o quociente dos incrementos como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$.

Geometricamente isto pode ser entendido como segue:

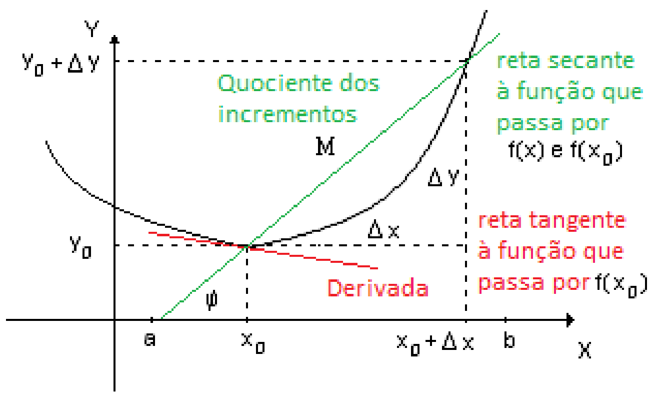

Figure 1: Representação geométrica do quociente dos incrementos e da derivada.

Como $tg(\varphi) = \frac{sen(\varphi)}{\cos(\varphi)}$, $sen(\varphi) = \frac{\Delta y}{M}$ e $cos(\varphi) = \frac{\Delta x}{M}$, temos que $tg(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ou seja, o quociente dos incrementos corresponde à tangente do ângulo que forma a secante com o eixo X. Note que este ângulo φ é função de Δx ($\varphi(\Delta x)$). O quociente dos incrementos é chamado de velocidade media de variação da função $f(x)$ no segmento $(x_o, x_o + \Delta x)$.

Definição 1 *Dizemos que $f(x)$ é derivavel no ponto x_o se existe o limite quando $\Delta x \to 0$ do quociente dos incrementos. O valor deste limite é chamado de derivada de $f(x)$ no ponto x_o e costuma-se denotar como:*
$$y'(x_o) = f'(x_o) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_o} = \frac{df}{dx}|_{x=x_o} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} tg(\varphi(\Delta x)).$$

Neste caso a secante quando $\Delta x \to 0$ é chamada de tangente à curva da função no ponto $(x_o, f(x_o))$. O $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg(\varphi(\Delta x)) = tg(\varphi_o)$ e por isto podemos interpretar geometricamente a derivada da função no ponto x_o como a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(x_o, f(x_o))$: $\frac{df}{dx}|_{x=x_o} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg(\varphi(\Delta x)) = tg(\varphi_o)$.

Se a função $f(x)$ admite derivada em cada ponto de certo intervalo $(c, d) \subset Domf$, então $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ constitue uma nova função definida no intervalo (c, d).

Exemplo 1: $f(x) = c$, onde c representa uma constante. Então $f(x_o + \Delta x) = c$ $\forall x_o \in \mathbb{R}$. Portanto, $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 0$ $\forall x_o \in \mathbb{R}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ e $y' = 0$.

Exemplo 2: $f(x) = x$. Neste caso $f(x_o + \Delta x) = x_o + \Delta x$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \frac{(x_o+\Delta x)-x_o}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Portanto $y' = 1$ $\forall x_o \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: $f(x) = x^2$. Neste caso $f(x_o+\Delta x) = (x_o+\Delta x)^2$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \frac{(x_o+\Delta x)^2-x_o^2}{\Delta x} = \frac{(x_o+\Delta x+x_o)(x_o+\Delta x-x_o)}{\Delta x} = \frac{(2x_o+\Delta x)(\Delta x)}{\Delta x} = (2x_o+\Delta x)$. Portanto $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_o$ $\forall x_o \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4: $f(x) = |x|$. Neste caso $f(x_o + \Delta x) = |x_o + \Delta x|$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x_o+\Delta x|-|x_o|}{\Delta x}$. Se $x_o > 0$ ($x_o < 0$) podemos escolher $|\Delta x|$ o suficientemente pequeno para que $(x_o + \Delta x) > 0$ ($(x_o + \Delta x) < 0$), logo temos :
$$\begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \text{para } x_o > 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 & \text{para } x_o < 0 \end{cases} \text{ e portanto } \begin{cases} y' = 1 & \text{para } x_o > 0 \\ y' = -1 & \text{para } x_o < 0 \end{cases}.$$
No ponto $x_o = 0$ temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{para } x_o > 0 \\ -1 & \text{para } x_o < 0 \end{cases}$, logo o limite quando $\Delta x \to 0$ não existe, e portanto a derivada no ponto $x_o = 0$ também não existe. Note que os limites laterais existem más são diferentes.

Derivadas laterais e infinitas.

Analogamente aos conceitos de limites e continuidade lateral, introduzimos o conceito de derivada lateral.

Definição 2 *Chamamos de derivada lateral direita (esquerda) da função $y = f(x)$ no ponto x_o ao limite lateral direito (esquerdo) do quociente incremental quando $\Delta x \to 0$ se existe o limite.*
$$f'_+(x_o) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \text{ (derivada pela direita).}$$
$$f'_-(x_o) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \text{ (derivada pela esquerda).}$$

Note que, para que exista $f'(x_o)$ é necessario e suficiente que existam e sejam iguais as derivadas laterais em x_o. Isto é: $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$.

Definição 3 *Se em determinado ponto x_o temos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \infty$ dizemos que a função possue derivada infinita em x_o. Neste caso, a reta tangente ao gráfico da função será perpendicular ao eixo X.*

Exemplo: Determine $f'_+(x_o = 0)$ para $y = \sqrt[3]{x}$.
$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$ e $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{(\Delta x)^2}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty$.

Regras de derivação.

Já sabemos que se c é uma constante $y' = (c)' = 0$. Também, se $y = x$, então $y' = (x)' = 1$. Se $y = x^2$, então $y' = (x^2)' = 2x$.

Teorema 1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções derivaveis no ponto x_o, então as funções $[f(x) \pm g(x)]$, $[f(x)g(x)]$ e $[\frac{f(x)}{g(x)}]$ (com $g(x) \neq 0$) são derivaveis em x_o e se verifica:*
1) $[f(x) \pm g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o)$,
2) $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$,
3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=x_o} = \frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$, *se* $g(x_o) \neq 0$.

Prova:
1) $y = f(x) \pm g(x)$, então $\Delta y = (f(x_o+\Delta x) \pm g(x_o+\Delta x)) - (f(x_o) \pm g(x_o)) = (f(x_o+\Delta x) - f(x_o)) \pm (g(x_o+\Delta x) - g(x_o))$, portanto
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(f(x_o+\Delta x)-f(x_o))}{\Delta x} \pm \frac{(g(x_o+\Delta x)-g(x_o))}{\Delta x} \right)$ como por hipotesis $f(x)$ e $g(x)$ possuem derivada no ponto x_o, então existem os limites de cada sumando e podemos usar a propriedade do limite da suma:
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x_o+\Delta x)-f(x_o))}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x_o+\Delta x)-g(x_o))}{\Delta x}$, ou seja, $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o)$.
O restante das provas fica de exercício.
Note que como caso particular de 2) e 3) temos que $[cf(x)]' = cf'(x) + c'f(x) = cf'(x)$ e $\left[\frac{c}{g(x)}\right]' = \frac{c'g(x)-cg'(x_o)}{(g(x_o))^2} = -\frac{cg'(x_o)}{(g(x_o))^2}$ se $g(x) \neq 0$.

Derivadas de algumas funções (Tabela de derivadas).

a) $y = x^n$, onde n é um número inteiro. Utilizando a formula da derivada do produto e o principio da indução podemos demostrar que $y' = nx^{n-1}$. Isto também vale para n sendo um número racional.
b) $y = sen(x)$, $y' = cos(x)$.
c) $y = cos(x)$, $y' = -sen(x)$.
d) $y = tg(x)$, $y' = \frac{1}{(cos(x))^2} = \frac{1}{cos^2(x)}$.
e) $y = ctg(x)$, $y' = -\frac{1}{(sen(x))^2} = -\frac{1}{sen^2(x)}$.
f) $y = \log_a(x)$, $y' = \frac{1}{x}\log_a e$, no caso que $a = e$ temos $y' = \frac{1}{x}$.
g) $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, no caso que $a = e$ temos $y' = e^x$.
h) derivada das funções hiperbólicas $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico) e $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico):

$y' = (sh(x))' = ch(x)$.
$y' = (ch(x))' = sh(x)$.
$y' = (th(x))' = \frac{1}{(ch(x))^2}$.
$y' = (cth(x))' = \frac{1}{(sh(x))^2}$, se $x \neq 0$.

Derivada da função composta:
Se $y = f(u)$ e $u = \psi(x)$ possuem derivadas em $u_0 = \psi(x_0)$ e x_0 respetivamente, então a função composta $y = f(\psi(x))$ também possue derivada em x_0 e temos $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. Esta regra pode ser aplicada a cadeias de qualquer número finito de funções derivaveis e também é conhecida como Regra da Cadeia.

Exemplo: Determine a derivada de $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^5$. Fazendo $u = x^2 - 2x + 3$ temos $y = u^5$ e pela formula temos $\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^5)}{du}\frac{d(x^2-2x+3)}{dx} = 5u^4(2x-2) = 10(x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)^4$.

Deivada logaritmica:
Chamamos derivada logaritmica da função $y = f(x)$ à derivada do logaritmo de dita função: $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Isto pode facilitar o calculo da derivada em casos do tipo $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$.

Exemplo: $y = u^v$, onde $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$.
Pegando o logaritmo da função temos $\ln y = \ln u^v = v \ln u$ e derivando o produto de duas funções obtemos $(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)'$, $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$ e $y' = y(v' \ln u + v\frac{u'}{u})$ ou $y' = u^v(v' \ln u + v\frac{u'}{u})$.

Derivadas de funções que não são explicitamente dada.

1) Derivada da função inversa.
Se a derivada da função $y = f(x)$ é $\frac{dy}{dx} \neq 0$ em x_0, então a derivada da função inversa $x = f^{-1}(y)$ será $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Exemplo: $y = arcsen(x)$. A função inversa é $x = sen(y)$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e $-1 \leq x \leq 1$. Note que mesmo que a função $x = f^{-1}(y)$ existe para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, a derivada se anula nos pontos $y = \pm\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\frac{dy}{dx} = cos(x) = 0$ em $y = \pm\frac{\pi}{2}$. Portanto, nestes pontos não podemos aplicar a formula da derivada da função inversa. Nos pontos restantes segue:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})}$, como $\frac{dx}{dy} = cos(y)$ logo $\frac{dy}{dx} = (arcsen(x))' = \frac{1}{cos(y)}$ e $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$.
Portanto, $(arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemplo: $y = x + \ln x$. Determine $\frac{dx}{dy}$.
$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ portanto $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{x+1}$.

2) Derivadas das funções dadas em forma paramétricas.
Dizemos que a relação entre y e x é dada parametricamente se tanto x quanto y são funções de uma terceira variavel t chamada de parâmetro $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. Então se verifica

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{dy}{dt})}{(\frac{dx}{dt})}$.

Exemplo: $\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = asen(t) \end{cases}$, $\frac{dy}{dt} = a\cos(t)$ e $\frac{dx}{dt} = -asen(t)$, logo $\frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos(t)}{asen(t)} = -ctg(t)$.

3) Derivada da função implicita.

Quando a dependencia entre y e x esta dada de forma implicita $F(x, y) = 0$, para determinar $\frac{dy}{dx}$ nos casos mais simples é suficiente:

a) achar a derivada com respeito a x de $F(x, y)$ considerando y função de x,

b) igualar esta derivada a zero $\frac{dF(x,y)}{dx} = 0$,

c) resolver a equação obtida com respeito a y'.

Exemplo: Achar $\frac{dy}{dx}$ se $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Seguindo a) e b) obtemos $3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + y') = 0$. Proseguindo com c) temos $y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$.

5.2 - Derivadas e diferenciais de ordem superior. Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

Derivadas de ordem superior.

Definição 4 *Se chama derivada de segunda ordem ou derivada segunda de uma função $y = f(x)$ num ponto x_o à derivada da função derivada neste ponto, sempre que a primeira derivada da função $y = f(x)$ exista no ponto x_o. A derivada segunda é denotada por : y'', $f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$.*

Seguindo este procedimento podemos obter a derivada de terceiro ordem, quarta e assim sucessivamente. Assumindo que estam definidas (existem) todas as derivadas até um certo ordem $(n - 1)$ numa vizinhança do ponto x_o, então podemos definir a derivada de ordem n da função $y = f(x)$ no ponto x_o como sendo a derivada da derivada de ordem $(n - 1)$ e é denotada por: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Exemplo: Determine y'' para $y = ln(1 - x)$.

$y' = -\frac{1}{(1-x)}$, $\quad y'' = (-\frac{1}{(1-x)})' = -\frac{1}{(1-x)^2}$.

Teorema 2 *Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que possuam derivadas até ordem n no ponto x_o, então as funções $[f(x) \pm g(x)]$ e $[f(x)g(x)]$ possuem derivadas até ordem n no ponto x_o e se verifica:*

1) $[f(x) \pm g(x)]^{(n)}_{x=x_o} = f^{(n)}(x_o) \pm g^{(n)}(x_o)$.

2) Formula de Leibniz:

$[f(x)g(x)]^{(n)}_{x=x_o} = f^{(n)}(x_o)g(x_o) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x_o)g'(x_o) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x_o)g''(x_o) + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_o)g^{(k)}(x_o) + \cdots + f(x_o)g^{(n)}(x_o)$, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$ (fatorial de n) e $0! = 1$ por definição.

Note que quando $n = 1$ na formula de Leibniz recaimos numa expressão já conhecida para a derivada do produto de duas funções. Isto é, $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) +$

$\binom{1}{1} f^{(0)}(x_o)g'(x_o)$, onde $f^{(0)}(x_o)$ significa que é a derivada de ordem zero, que coincide com a propria função $f(x)$. Como $\binom{1}{1} = 1$ temos $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$, que foi a expressão obtida anteriormente para a derivada do produto.

Derivadas de ordem superior de funções dadas em forma parametrica.

Se y é uma função de x em forma parametrica $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, suas derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ podem ser calculadas sucessivamente através das formulas:

derivada primeira $\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{dy}{dt})}{(\frac{dx}{dt})}$,

derivada segunda $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{(\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt})}{(\frac{dx}{dt})}$, e assim sucessivamente.

Exemplo: Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = bsen(t) \end{cases}$.

$\frac{dx}{dt} = -asen(t)$, $\frac{dy}{dt} = b\cos(t)$, portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos(t)}{-asen(t)} = -\frac{b}{a}ctg(t)$.

$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} = -\frac{b}{a}(ctg(t))' = -\frac{b}{a}(-\frac{1}{(sen(t))^2}) = \frac{b}{a}\frac{1}{(sen(t))^2}$, portanto $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{1}{(sen(t))^2}}{-asen(t)} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{(sen(t))^3}$.

Diferenciais de primer ordem e ordens superiores.

Definição 5 *Dizemos que $y = f(x)$ é diferenciavel no ponto x_o se o incremento Δy pode ser escrito na forma $\Delta y = D\Delta x + M(\Delta x)\Delta x$, onde D não depende do incremento Δx e $M(\Delta x)$ é um infinitessimo quando $\Delta x \to 0$ ($\lim_{\Delta x\to 0} M(\Delta x) = 0$).*

A parte linear com respeito ao incremento Δx é chamada de diferencial de primeiro ordem da função y e denotada por dy ou df:

$\Delta y = \underbrace{D\Delta x}_{dy} + M(\Delta x)\Delta x$ e quando $\Delta x \to 0$ temos $dy = Ddx$ onde dx é o diferencial da variavel independente x.

Exemplo: $y = x$. Neste caso $\Delta y = \Delta x$ portanto $D = 1$ e $M(\Delta x) = 0$, consequentemente $dy = dx$.

Teorema 3 *Uma função $y = f(x)$ é diferenciavel num ponto x_o se e somente se é derivavel neste ponto e se verifica: $dy = y'dx$.*

Isto é, a diferencial de uma função é igual ao produto de sua derivada pelo diferencial da variavel independente.

Exemplo: Determine a diferencial de $y = 3x^2 - x$.

Primeira via:

$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 3x^2 + x$ (x corresponde ao x_o arbitrario) $= \underbrace{(6x-1)}_{D}\Delta x + \underbrace{3\Delta x}_{M}\Delta x$ portanto $dy = (6x-1)dx$.

Segunda via:

$y' = 6x - 1$ como $dy = y'dx$ segue $dy = (6x-1)dx$.

Propriedade fundamentais das diferenciais.
a) $dc = 0$, onde c é uma constante
b) $dx = \Delta x$, onde x é a variavel independente (incremento infinitesimal)
c) $d(cu) = cdu$
d) $d(u \pm v) = du \pm dv$
e) $d(uv) = udv + vdu$
f) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ se $(v \neq 0)$
g) $d(f(u)) = f'(u)du = \frac{df}{du}du = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx = \frac{df}{dx}dx$.

Aplicação do diferencial nos calculos aproximados.
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = D\Delta x + M(\Delta x)\Delta x \quad$ como $dy = Ddx = f'(x)dx$
$= f'(x)\Delta x + M(\Delta x)\Delta x.$

Quando $|\Delta x|$ é pequeno nós podemos desprezar o termo $M(\Delta x)\Delta x$, já que é um infinitessimo de ordem maior que o termo $f'\Delta x$. Neste caso obtemos uma expressão aproximada para o incremento da função:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, ou seja $\Delta y \approx dy$ e portanto $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Diferenciais de ordem superior.

Definição 6 *Seja $y = f(x)$ diferenciavel em todo ponto do intervalo (a, b). Seu diferencial é denotado $dy = f'(x)dx$. Chamamos diferencial de segunda ordem ao diferencial do diferencial de primeiro ordem. Isto é: $d(dy) = d^2y = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dxd(f'(x)) = dxf''(x)dx$.*

$d^2y = f''(x)(dx)^2$. Note que dx é considerado constante (esta fixo), logo $d(dx) = d^2x = 0$ sempre. Por este motivo na notação da derivada segunda é usado $\frac{d^2y}{dx^2}$ e não $\frac{d^2y}{d^2x}$.

De forma semelhante é definido o diferencial de terceira ordem e assim sucessivamente se obtendo:

$d^3y = y'''(dx)^3,$
$\vdots \qquad \vdots$
$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$

No caso que se tem $y = f(u)$, onde $u = \varphi(x)$ temos:

$dy = f'(x)dx$, onde $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(u(\varphi(x)))}{dx}$ a derivada da função composta $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \Rightarrow dy = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx = \frac{df}{du}du$ já que $du = \frac{du}{dx}dx$. Isto é, $dy = \frac{df}{du}du$, onde $du = \frac{du}{dx}dx$.

Agora $d^2y = d(dy) = d(\frac{df}{du}du)$ aplicando a propriedade para o produto temos
$= d(\frac{df}{du})du + \frac{df}{du}d(du) = d(\frac{df}{du})du + \frac{df}{du}d^2u$, fazendo $g = \frac{df}{du}$ temos que $d(\frac{df}{du}) = dg = \frac{dg}{du}du = \frac{d(\frac{df}{du})}{du}du = \frac{d^2f}{du^2}du$, portanto segue que:

$d^2y = \frac{d^2f}{du^2}(du)^2 + \frac{df}{du}d^2u.$

Este mesmo procedimento pode ser feito para obter diferenciais de ordem superior.

Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

Definição 7 ***(Extremos Absolutos)*** *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de (a, b). Dizemos que f possui um máximo absoluto (mínimo absoluto) no ponto x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (a, b)$ $(f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (a, b))$.*

Definição 8 ***(Extremos Relativos)*** *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de (a, b). Dizemos que f possui um máximo relativo (mínimo relativo) no ponto x_0 se, existe uma vizinhança do ponto x_0 $V(x_0, \delta)$, tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in V(x_0, \delta)$ $(f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in V(x_0, \delta))$.*

Teorema 4 ***(Fermat)*** *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) tal que no ponto $x_0 \in (a, b)$ alcança seu valor máximo ou mínimo neste intervalo. Se a derivada $f'(x_0)$ existe, então $f'(x_0) = 0$.*

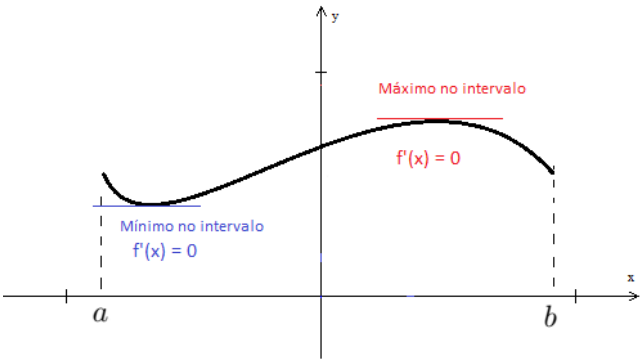

Figure 2: Representação geométrica do teorema de Fermat.

Geometricamente o teorema de Fermat diz que nos pontos de extremos de uma função, quando são pontos interiores de um intervalo, se existe a derivada (reta tangente ao gráfico da função) nestes pontos, então ela é horizontal. Agora veremos um exemplo, onde o teorema não é válido.

Exemplo: $y = 1 - |x|$ em $(-1, 1)$ alcança seu valor máximo no ponto $x = 0$, mas neste ponto não existe a derivada, portanto não existe a tangente e o teorema não pode ser aplicado.

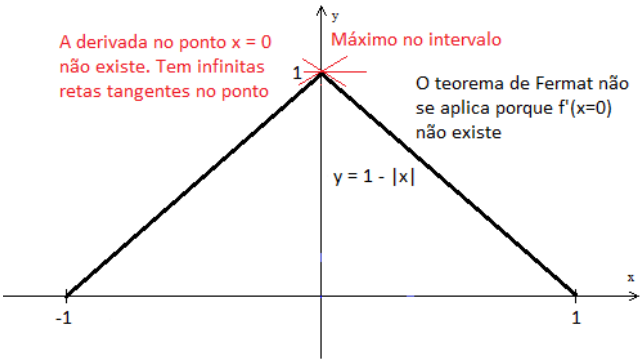

Figure 3: Representação geométrica do exemplo.

Teorema 5 ***(Rolle)*** *Se uma função é contínua no intervalo $[a, b]$, possui derivada $f'(x)$ $\forall x \in]a, b[$, e $f(a) = f(b)$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

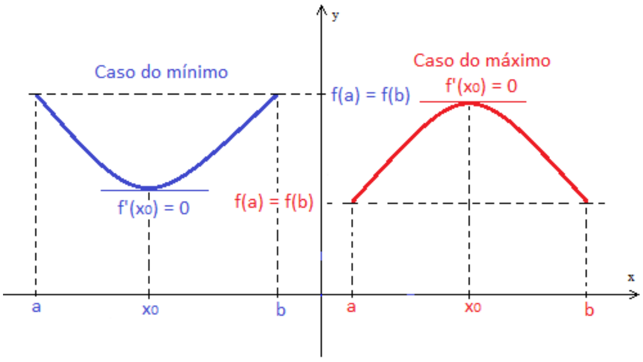

Figure 4: Representação geométrica do teorema de Rolle.

Teorema 6 ***(Lagrange)*** *Se uma função é contínua no intervalo $[a, b]$, e possui derivada $f'(x)$ $\forall x \in]a, b[$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$.*

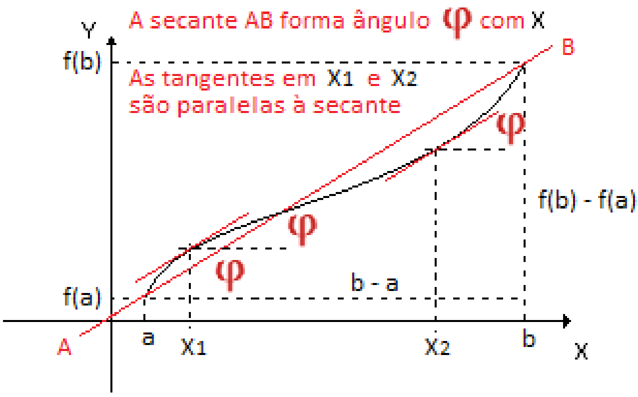

Figure 5: Representação geométrica do teorema de Lagrange.

Teorema 7 ***(Cauchy)*** *Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$, possuem derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ $\forall x \in]a, b[$ que não se anulam simultaneamente, e $g(b) \neq g(a)$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.*

5.3 - Máximos e mínimos locais e globais. Esboço de gráficos. Regra de L'Hospital - Bernoulli. Séries de Taylor e McLawrin.

Crescimento e decrescimento de funções de uma varíavel real.

Definição 9 *Se diz que a função $f(x)$ é crescente (decrescente) no intervalo $]a, b[$ se para quaisquer pontos x_1 e x_2 deste intervalo tais que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

Teorema 8 *Seja $f(x)$ continua no intervalo $[a, b]$. Se $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall x \in]a, b[$, então $f(x)$ é crescente (decrescente) no intervalo $[a, b]$.*

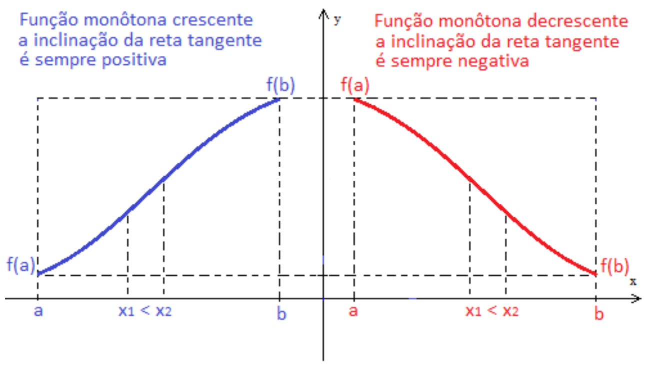

Figure 6: Representação geométrica de funções monôtonas crescente e decrescente.

Os pontos x_0 onde $f(x_0)$ não é crescente nem decrescente são chamados de pontos críticos ou estacionários. Nestes pontos $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe. Os pontos críticos delimitam os intervalos de monotonia de crescimento ou decrescimento de $f(x)$.

Exemplo: A função $y = x^2 - 2x + 2$ tem um único ponto crítico:
$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2 = 2(x - 1) = 0$ se $x = 1$.

Já que o domínio de definição desta função são todos os múmeros reais, este domínio é dividido em apenas dois intervalos pelo único ponto crítico. No intervalo $(-\infty, 1)$ a funão é monôtona decrescente porque a derivada em todos estes pontos é negativa. No intervalo $(1, \infty)$ a funão é monôtona crescente porque a derivada em todos estes pontos é positiva. Veja o gráfico da função na figura 7.

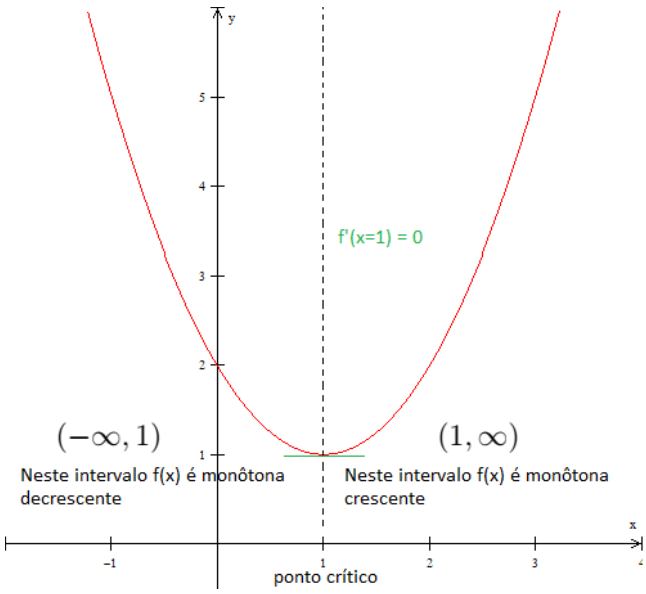

Figure 7: Intervalos de crescimento e decrescimento de $y = x^2 - 2x + 2$.

Máximos e mínimos locais (relativos) e globais (absolutos).

Os pontos de máximo ou mínimos relativos ou locais também são chamados de extremos relativos da função. O número $f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) relativo da função no intervalo $V(x_0, \delta)$.

Condição Necessária para a existência de **Extremos Relativos**.

Teorema 9 *Se em x_0 existe um extremo relativo, então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.*

Condição Suficiente para a existência de **Extremos Relativos**.

Teorema 10 ***(Sinal da primeira derivada)*** *Em x_0 há um máximo (mínimo) relativo de $f(x)$ se existe uma vizinhança $V(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) para $x_0 < x < x_0 + \delta$.*

Note que em x_0 não existirá extremo relativo de $f(x)$ se $f'(x)$ conserva o mesmo sinal $\forall x \in V(x_0, \delta)$.

Teorema 11 ***(Sinal da segunda derivada)*** *Em x_0 há um máximo (mínimo) relativo de $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).*

Em x_0 não existirá extremo relativo de $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$. Em geral, quando a primeira derivada que não se anula é de ordem k impar não existirá extremo relativo de $f(x)$ em x_0. Se k é par existirá um máximo (mínimo) relativo se $f^{(k)}(x_0) < 0$ ($f^{(k)}(x_0) > 0$).

Exemplo: Encontre os extremos relativos de $y = x^3 - 3x^2 + 4$ no intervalo $(-2, 4)$?

Condição Necessária: $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.
Como esta função possui derivada em todo seu domínio, apenas resta a condição $f'(x_0) = 0$. Sabendo que $f' = 3x^2 - 6x$ segue que $3x(x - 2) = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Estes são os pontos críticos. Para saber se há extremos relativos devemos verificar a condição necessária, e neste exemplo vamos usar Teorema 11.
Condição Suficiente: máximo relativo se $f''(x_0) < 0$ e mínimo relativo se $f''(x_0) > 0$.
Já que $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
Em $x_1 = 0$ temos $f''(x_1 = 0) = -6 < 0$, logo haverá um máximo relativo.
Em $x_2 = 2$ temos $f''(x_2 = 2) = 6 > 0$, logo haverá um mínimo relativo.

Os pontos de máximo ou mínimos absolutos ou globais também são chamados de extremos absolutos da função. O número $f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) absoluto da função.

Teorema 12 *Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$. O máximo (mínimo) absoluto de $f(x)$ em $[a, b]$ é alcançado no máximo (mínimo) relativo (ponto crítico) de $f(x)$ ou nos extremos do intervalo ($f(a)$ ou $f(b)$).*

Portanto, para encontrar os extremos absolutos devemos primeiro determinar os extremos relativos e posteriormente comparar os valores de $f(x)$ nos pontos críticos com os valores $f(a)$ e $f(b)$. O maior valor será o máximo absoluto e o menor o mínimo absoluto.

Exemplo: Encontre os extremos relativos e absolutos de $y = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $[-2, 3]$?

Extremos Relativos.
Condição Necessária: $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.
Como esta função possui derivada em todo seu domínio, apenas resta a condição $f'(x_0) = 0$. Sabendo que $f' = 3x^2 - 3$ segue que $3x(x-1) = 0$ em $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Estes são os pontos críticos. Para saber se há extremos relativos devemos verificar a condição necessária, e neste exemplo vamos usar Teorema 11.
Condição Suficiente: máximo relativo se $f''(x_0) < 0$ e mínimo relativo se $f''(x_0) > 0$.
Já que $f''(x) = 6x$.
Em $x_1 = -1$ temos $f''(x_1 = -1) = -6 < 0$, logo haverá um máximo relativo.
Em $x_2 = 1$ temos $f''(x_2 = 1) = 6 > 0$, logo haverá um mínimo relativo.
Extremos Absolutos
Para determinar os extremos absolutos usamos o Teorema 12. Portanto, devemos comparar os valores de $f(x)$ nos pontos críticos e nos extremos do intervalo $[-2, 3]$.
Os valores da função nos pontos críticos são:
$f(x_1 = -1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$,
$f(x_1 = 1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$.
Os valores da função nos extremos do intervalo $[-2, 3]$ são:
$f(x_3 = -2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1$,
$f(x_4 = 3) = (3)^3 - 3(3) + 3 = 21$.
Comparando estes quatro valores $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))$ chegamos a conclusão que o máximo absoluto é alcançado no ponto $(x_4, f(x_4))$, e o mínimo absoluto é alcançado nos pontos $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$. Note que neste exemplo o mínimo relativo é também um mínimo absoluto, porém isto vai depender do intervalo $[a, b]$ que está sendo analisado.

Exercício: Encontre os extremos relativos e absolutos de $y = e^x sen(x)$ no intervalo $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

Esboço de gráficos.

Para construir o gráfico de uma função é necessário conhecer as seguintes informações:
i) determinar o domínio de definição da função e sua imagem,
ii) determinar os pontos de descontinuidade da função,
iii) determinar os pontos críticos da função com os intervalos de crescimento e decrescimento,
iv) determinar os extremos relativos e absolutos da função,
v) determinar se existe simetria, periodicidade, monotonia, ou sinal constante da função.

Exercício: Esboçe o gráfico de $y = e^x sen(x)$ no intervalo $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

Regra de L'Hospital - Bernoulli para o cálculo de limites indeterminados.

Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: Nestes casos temos duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que se tem derivada primeira numa vizinhança de x_0 e $g'(x_0) \neq 0$, tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$). Se existe o $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então se verifica a fórmula de L'Hospital - Bernoulli:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Esta regra também é válida se $x_0 = \infty$. No caso que $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ continue com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, e as funções $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem as condições anteriormente exigidas, então o teorema pode ser aplicado novamente a $f'(x)$ e $g'(x)$ como:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}. \tag{2}$$

E assim, a regra pode ser aplicada sucessivamente até conseguir resolver a indeterminação. Entretanto, é importante destacar que pode existir o $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ sem que exista $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Neste caso não pode ser aplicada a Regra de L'Hospital - Bernoulli e $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ deve ser resolvido usando os métodos estudados anteriormente para resolver limites indeterminados no **Tópico 3**.

Exemplo: Determine o $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2cos(x)-2}$?

Neste exemplo temos $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 + 2cos(x) - 2$, e em $x_0 = 0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Ambas as funções têm derivadas em $V(0,\delta)$: $f'(x) = 4x^3$ e $g'(x) = 2x - 2sen(x)$. Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2sen(x)} = \frac{0}{0}$ continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as derivadas: $f''(x) = 12x^2$ e $g''(x) = 2 - 2cos(x)$. Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2cos(x)} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as segundas derivadas: $f'''(x) = 24x$ e $g'''(x) = 2sen(x)$. Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{24x}{2sen(x)} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, sabendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} = 1$ segue que $\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2sen(x)} = \lim_{x\to 0} 12\frac{x}{sen(x)} = 12$. Portanto,

$12 = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2cos(x)-2}$.

Exemplo: Determine o $\lim_{x\to 0}\frac{ln(x)}{ctg(x)}$?

Neste exemplo temos $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = ctg(x)$, e em $x_0 = 0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Ambas as funções têm derivadas em $V(0,\delta)$: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = -\frac{1}{sen^2(x)}$. Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sen^2(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$ ou $\lim_{x\to 0} -\frac{sen^2(x)}{x} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as derivadas: $\hat{f}''(x) = (-sen^2(x))' = -2sen(x)cos(x)$ e $\hat{g}''(x) = (x)' = 1$. Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{\hat{f}''(x)}{\hat{g}''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(x)cos(x)}{1} = -2sen(0)cos(0) = -2*0*1 = 0$. Portanto,

$0 = \lim_{x\to 0}\frac{\hat{f}''(x)}{\hat{g}''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(x)}{ctg(x)}$.

Agora veremos um exemplo onde o limite existe e não pode ser usado a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen(\frac{1}{x})}{sen(x)}$?

Sabendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} xsen(\frac{1}{x}) = 0$ segue que $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen(\frac{1}{x})}{sen(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)} xsen(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}\lim_{x\to 0} xsen(\frac{1}{x}) = 1 * 0 = 0$.

Agora ao tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ e $f'(x) = 2xsen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$.

$g(x) = sen(x)$ e $g'(x) = cos(x)$.

Logo, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2xsen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})}{cos(x)}$. Sabendo que $\lim_{x\to 0} cos(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} 2xsen(\frac{1}{x}) = 0$ e $\lim_{x\to 0} cos(\frac{1}{x})$ não existe, podemos concluir que não pode ser aplicada a Regra de L'Hospital - Bernoulli, embora o $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ exista.

Indeterminações do tipo $0\cdot\infty$: Neste caso temos as funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, então o produto $f(x)g(x)$ pode ser transformado como segue:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{[\frac{1}{g(x)}]} \text{ (indeterminação } \frac{0}{0}) = \frac{[\frac{1}{f(x)}]}{g(x)} \text{ (indeterminação } \frac{\infty}{\infty}). \tag{3}$$

Desta forma a indeterminação do tipo $0\cdot\infty$ é transformada em tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Indeterminações do tipo $\infty-\infty$: Neste caso temos as funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, então $f(x) - g(x)$ pode ser transformado como segue:

$$f(x) - g(x) = f(x)\Big[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\Big] \text{ (indeterminação } \infty\cdot 0) \text{ se } \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 1. \tag{4}$$

Desta forma a indeterminação do tipo $\infty-\infty$ é transformada em tipo $0\cdot\infty$ que pode ser transformada em $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ para poder tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $L = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{sen^2(x)} - \frac{1}{x^2}]$.

Neste caso temos uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$ que pode ser transformada em indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ se aplicamos denominador comum.

$L = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - sen^2(x)}{x^2 sen^2(x)}$, que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, antes de aplicarmos a Regra de L'Hospital - Bernoulli, para facilitar os cálculos, vamos substituir o denominador por um infinitessimo equivalente. Isto é, sabendo que $sen(x)\sim x$ quando $x\to 0$, então $x^2 sen^2(x)\sim x^2x^2 = x^4$ quando $x\to 0$. Logo, $L = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - sen^2(x)}{x^4}$, que continua sendo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$f(x) = x^2 - sen^2(x)$ e $f'(x) = 2x - sen(2x)$.

$g(x) = x^4$ e $g'(x) = 4x^3$.

Logo, $L = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - sen(2x)}{4x^3}$, que continua sendo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$f''(x) = 2 - 2cos(2x)$.

$g''(x) = 12x^2$.

$L = \lim_{x\to 0}\frac{2x - sen(2x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2cos(2x)}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - cos(2x)}{6x^2}$.

Sabendo que $cos(2x) = cos(x+x) = cos(x)cos(x) - sen(x)sen(x) = cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x)$ segue que $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-[1-2sen^2(x)]}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2sen^2(x)}{6x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} = L$.

Indeterminações do tipo 1^∞ ou 0^0 ou ∞^0: Nestes casos temos $f(x)^{g(x)}$ e devemos tomar o logaritmo $f(x)^{g(x)} = e^{\left(\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]\right)}$. Assim, $\ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = g(x)ln[f(x)]$ que resulta em indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$ que podemos transformar em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ para poder tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $L = \lim_{x\to 0}[cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}$?

Neste caso temos uma indeterminação do tipo 1^∞ que pode ser transformada em indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ usando propriedades do logaritmo e exponêncial como segue.

$e^{ln(x)} = x$, então $e^{ln[cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = [cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}$. Logo,

$L = \lim_{x\to 0}[cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{ln[cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0} ln[cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} ln[cos(2x)]}$.

Chamamos $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} ln[cos(2x)]$ que é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$f(x) = 3ln[cos(2x)]$ e $f'(x) = -6tg(2x)$.

$g(x) = x^2$ e $g'(x) = 2x$.

Logo, $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-6tg(2x)}{2x} = -6 \lim_{x\to 0} \frac{tg(2x)}{2x} = -6 \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2xcos(2x)} = -6 \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos(2x)} = -6 \cdot 1 \cdot 1 = -6$. Portanto, $L = e^{L_1} = e^{-6}$.

Séries de Taylor e McLawrin.

Se uma função $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, possui derivadas contínuas até a ordem $(n-1)$ $\forall x \in [a, b]$, e existe a derivada de ordem n $\forall x \in]a, b[$, então a função pode ser representada como uma Série de Taylor entorno do ponto $x_0 \in [a, b]$ na forma a seguir:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned} \tag{5}$$

onde o ponto $\xi \in]a, b[$. Esta é a conhecida e muito útil Fórmula de Taylor que nesta notação pode ser descrita com um número finito de termos. Porém, para isto é necessário conhecer o ponto ξ. Outra forma de expressar a Série de Taylor em infinitos termos é da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned} \tag{6}$$

onde $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $0! = 1$.

No caso particular que $x_0 = 0$ na Série de Taylor obtemos a Série de Maclaurin.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \end{aligned} \tag{7}$$

Deve ser dito que historicamente primeiro surgiu a Fórmula de Maclaurin para aproximar as funções entorno da origem ($x = 0$). Posteriormente foi generalizada para a Fórmula de Taylor que permite aproximar a função entorno de um ponto diferente da origem ($x = x_0 \neq 0$). Também, é importante ressaltar que quando aproximamos funções os infinitos termos da série são trocados por um número finito de termos de acordo com nossa necessidade de precisão na aproximação como segue:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad \text{para Maclaurin,} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{para Taylor.} \end{aligned} \tag{9}$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ no entorno do ponto $x_0 = 2$.

O primeiro que deve ser feito é calcular as derivadas da função no ponto x_0.
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ e em $x_0 = 2$ temos $f(2) = 11$.
2) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ e em $x_0 = 2$ temos $f'(2) = 7$.
3) $f''(x) = 6x - 4$ e em $x_0 = 2$ temos $f''(2) = 8$.
4) $f'''(x) = 6$ e em $x_0 = 2$ temos $f'''(2) = 6$.
5) $f^n(x) = 0 \ \forall n \geq 4$.
Agora substituimos na formula de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

$$f(x) = 11 + 7(x - 2) + \frac{8}{2!}(x - 2)^2 + \frac{6}{3!}(x - 2)^3 + \frac{0}{4!}(x - 2)^4 + \cdots$$

Note que todos os termos com derivadas de ordem maior ou igaul a 4 são zero. Isto quer dizer que a formula de Taylor corresponde de forma exata à função

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x - 2) + \frac{8}{2!}(x - 2)^2 + \frac{6}{3!}(x - 2)^3. \tag{10}$$

Isto porque a função é um polinômio de terceiro grau. Mas se for desconsiderado o termo da derivada terceira, então a formula de Taylor aproxima a função

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \approx 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2. \tag{11}$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = sen(x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0.
1) $f(x) = sen(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = sen(0) = 0$.
2) $f'(x) = cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = cos(0) = 1$.
3) $f''(x) = -sen(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = -sen(0) = 0$.
4) $f'''(x) = -cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = -cos(0) = -1$.
5) $f^{iv}(x) = sen(x) = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = sen(0) = 0$.
Desta forma se repetem de forma ciclica as derivadas. Agora substituimos na formula de Taylor:

$$sen(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \cdots$$

que reorganizando obtemos

$$sen(x) = x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{-1}{11!}x^{11} + \cdots$$

Note que o $sen(x)$ é uma função impar ($f(-x) = -f(x)$) e por isto na Formula de Taylor aparecem apenas os termos com potência impar.

Esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$, ou seja que $sen(x)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{-1}{11!}x^{11} + \cdots}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0}[1 + \frac{-1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \frac{-1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 + \frac{-1}{11!}x^{10} + \cdots] = 1.$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = cos(x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0.
1) $f(x) = cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = cos(0) = 1$.
2) $f'(x) = -sen(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = -sen(0) = 0$.
3) $f''(x) = -cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = -cos(0) = -1$.
4) $f'''(x) = sen(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = sen(0) = 0$.
5) $f^{iv}(x) = cos(x) = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = cos(0) = 1$.
Desta forma se repetem de forma ciclica as derivadas. Agora substituimos na formula de Taylor:

$$cos(x) = 1 + 0(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{0}{5!}(x-0)^5 + \cdots$$

que reorganizando obtemos

$$cos(x) = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{-1}{10!}x^{10} + \cdots$$

Note que o $cos(x)$ é uma função par $(f(-x) = f(x))$ e por isto na Formula de Taylor aparecem apenas os termos com potência par.

Também, esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x\to 0} \frac{2(1-cos(x))}{x^2} = 1$, ou seja que $(1 - cos(x))$ é um infinitésimo equivalente a $\frac{x^2}{2}$ quando x tende para zero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{-1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{-1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2(\frac{1}{2!} + \frac{-1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 + \frac{-1}{8!}x^6 + \frac{1}{10!}x^8 + \cdots) = 1$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = e^x$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0.
1) $f(x) = e^x$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = e^0 = 1$.
2) $f'(x) = e^x = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = e^0 = 1$.
Desta forma se repetem as derivadas. Agora substituimos na formula de Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \cdots$$

que reorganizando obtemos

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

Note que e^x não é uma função par nem impar, e por isto na Formula de Taylor aparecem todos os termos com potência par e impar.

Também, esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = 1$, ou seja que $(e^x - 1)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3 + \frac{1}{5!}x^4 + \cdots) = 1$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = ln(1+x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0.
1) $f(x) = ln(1+x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = ln(1+0) = 0$.
2) $f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = \frac{1}{(1+0)} = 1$.
3) $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$.
4) $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$.
5) $f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$ e em $x_0 = 0$ temos $f^{iv}(0) = \frac{-6}{(1+0)^4} = -6$.
E assim sucessivamente a derivada de ordem n pode ser representda como $f^n(x) = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\forall n \geq 1$ e em $x_0 = 0$ temos $f^n(0) = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$.
Agora substituimos na formula de Taylor:

$$ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3 + \frac{-6}{4!}(x-0)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}(x-0)^n + \cdots$$

que reorganizando obtemos

$$ln(1+x) = x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-6}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^n + \cdots$$

Note que $ln(1+x)$ não é uma função par nem impar, e por isto na Formula de Taylor aparecem todos os termos com potência par e impar.

Também, esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$, ou seja que $ln(1+x)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-6}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^n + \cdots)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + \frac{-1}{2!}x + \frac{2}{3!}x^2 + \frac{-6}{4!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^{(n-1)} + \cdots) = 1$$

Todos estes exemplos mostram que a formula de Taylor pode ser usada para encontrar infinitésimos equivalentes de uma função no entorno de um ponto x_0. Porém, esta não é a única utilidade da série de Taylor. Ela também pode ser usada para aproximar derivadas por diferenças finitas e etc.

Referências Bibliográficas

1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.

2- Serge Lang, Cálculo, V1.

3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.

4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.

5- Diva Marilia Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.

6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.

7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.

9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.

10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.

11- G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.