

NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 3- Limites de Funções.

3.1 - Definição de Seqüências. Limite de seqüências. Representação de números reais por seqüências de números racionais. Teorema do confronto. Indeterminações.

3.2 - Limites de funções. Limites laterais. Infinitésimos e Infinitos. Teoremas sobre limites. Indeterminações.

3.3 - Métodos para resolver limites indeterminados.

3.1 - Definição de Seqüências. Limite de seqüências. Representação de números reais por seqüências de números racionais. Teorema do confronto. Indeterminações.

Vizinhança, ponto de acumulação e o teorema de Bolzano-Weierstrass.

O primeiro conceito que devemos definir é o de vizinhança, vecindade ou entorno de um ponto, que nos diz o quão perto estamos do ponto em questão.

Definição 1 *Sejam ϵ e x_o dois números reais, $\epsilon > 0$. Chamamos vizinhança de x_o com raio ϵ ao intervalo aberto $(x_o - \epsilon, x_o + \epsilon)$, que é denotado por $V(x_o, \epsilon)$ e o ponto x_o é chamado de centro da vizinhança.*

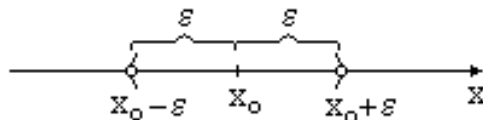


Figure 1: Representação gráfica da vizinhança de x_o com raio ϵ .

Note que usando a definição de valor absoluto podemos expressar a vizinhança em notação de conjunto como $V(x_o, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_o| < \epsilon\}$, já que a solução da desigualdade $|x - x_o| < \epsilon$ é o intervalo aberto $x \in (x_o - \epsilon, x_o + \epsilon)$. Veja a representação gráfica na Figura 2.

Definição 2 *Seja S um conjunto de números reais. Dizemos que x_o é um ponto de acumulação de S , se toda vizinhança $V(x_o, \epsilon)$ contém, ao menos, um ponto de S diferente de x_o .*

Note que da definição de ponto de acumulação, o ponto x_o não necessariamente pertence a S . Veja dois exemplos gráficos na Figura 3.

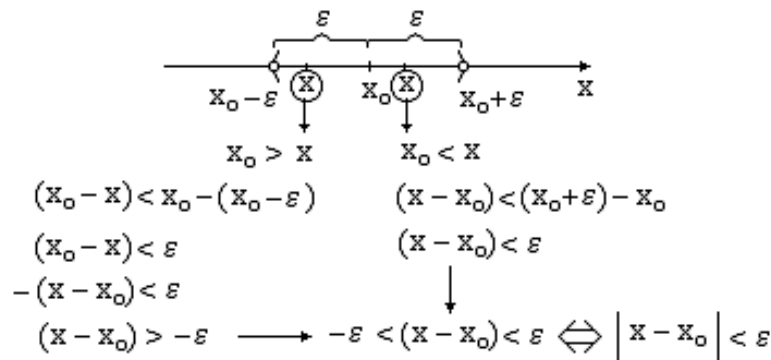


Figure 2: Representação da vizinhança em notação de conjunto.

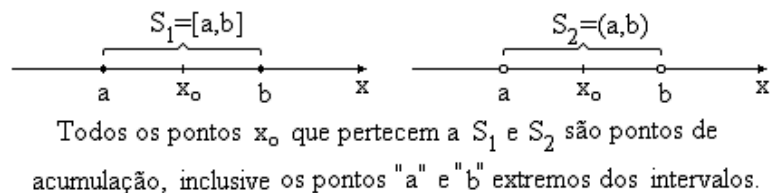


Figure 3: Representação gráfica do ponto de acumulação.

Teorema 1 *Seja S um conjunto de números reais. Se x_0 é um ponto de acumulação de S , então toda vizinhança $V(x_0, \epsilon)$ contém uma infinidade de pontos de S .*

Prova: Suponha o contrário, isto é, que existe uma vizinhança $V(x_0, \epsilon)$ que contenha somente um número finito de pontos de S , diferentes de x_0 . Sejam estes pontos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e denotemos por ϵ o menor dos números positivos $|x_0 - x_1| = \epsilon_1, |x_0 - x_2| = \epsilon_2, \dots, |x_0 - x_n| = \epsilon_n$. Então, $V(x_0, \epsilon)$ será uma vizinhança de x_0 que não contém pontos de S diferentes de x_0 , o qual é uma contradição porque x_0 é um ponto de acumulação. $\square$

Note que pelo teorema um conjunto que não tenha infinitos pontos, não pode ter ponto de acumulação. A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, o conjunto dos números naturais possui infinitos pontos, mas não tem ponto de acumulação. Por isto, o enunciado do teorema não diz "se e somente se". O teorema afirma que x_0 é um ponto de acumulação de S somente se toda vizinhança de x_0 contém uma infinidade de pontos em S . Ou seja, a condição de que o conjunto tenha infinitos elementos é necessária para que o mesmo possua ponto de acumulação, mas não garante (não é suficiente) que exista o ponto de acumulação. Agora veremos que se um conjunto infinito (condição necessária) é limitado, então necessariamente tem um ponto de acumulação.

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass) *Se um conjunto limitado S em $\mathbb{R}$ contém infinitos pontos, então existe ao menos um ponto de $\mathbb{R}$ que é ponto de acumulação de S .*

Exemplo: $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto S tem infinitos elementos. Também, S é limitado porque $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, satisfaz as duas condições do Teorema 2, logo tem

que ter pelo menos um ponto de acumulação. Particularmente, este conjunto só tem um único ponto de acumulação que é $x_0 = 0$. Note que o ponto de acumulação $x_0 = 0$ não pertence ao conjunto S .

Sequência. Limite de sequência. Indeterminações de limites de sequência.

Definição 3 *Se a cada número natural n associamos um número real x_n através de uma determinada relação, então chamamos de sucessão ou sequência ao conjunto dos números reais ordenados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Também denotado pelo símbolo $\{x_n\}$.*

A sequência ou sucessão é a função mais antiga que conhecemos, e a notação usada historicamente se manteve $\{x_n\}$. Agora veremos o conceito de sucessão convergente e limite da sucessão.

Definição 4 (Limite de sequência) *O número real l recebe o nome de limite da sucessão de números $x_1, x_2, x_3, \dots$ denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, se para qualquer $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) existe um número natural $N = N(\epsilon)$, tal que $|x_n - l| < \epsilon$ para todo $n > N$.*

Se a sucessão $\{x_n\}$ tem limite se diz que é convergente. Se uma sucessão $\{x_n\}$ não tem limite não é convergente, e se diz que é divergente. A notação $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ lê-se como limite de x_n quando n tende ao infinito é igual a l .

Note que o conceito de limite pode ser colocado em termos de vizinhança e ponto de acumulação. Isto é, a sequência tem limite l se para toda vizinhança existe um natural $N = N(\epsilon)$, tal que todos os elementos da sequência com $n > N(\epsilon)$ pertencem à vizinhança. Em outras palavras, o limite l da sequência é seu ponto de acumulação.

Exemplo: A sequência $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ é convergente, e seu limite é $l = 0$. Isto porque $|x_n - l| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}|$. Exigir que $|x_n - l| < \epsilon$ implica em que $\frac{1}{n} < \epsilon$ ou $n > \frac{1}{\epsilon}$. Portanto, o ponto de acumulação é $l = 0$.

Se $\{x_n\}$ é arbitrariamente grande com sinal positivo (negativo) quando $n \rightarrow \infty$, simbolicamente é representado por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty(-\infty)$. Nestes casos a sequência é divergente.

Exemplo: Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Considere a diferença $\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}$. Se tomamos o valor absoluto desta igualdade temos $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}$. Considerando que $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = N(\epsilon)$, então para cada número positivo ϵ podemos encontrar um número $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$, tal que para todo natural $n > N$ se verifica a desigualdade $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \epsilon$. Portanto, o número 2 é o limite da sucessão $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Teorema 3 *O limite de uma sequência convergente $\{x_n\}$ é unico.*

Teorema 4 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências convergentes. Então se verifica as seguintes propriedades:*

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$,
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$,
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$.

No caso que as seqüências sejam divergentes, uma ou as duas, as propriedades aritméticas anteriores não são válidas. Estes dois teoremas serão de crucial importância para calcular limites.

Exemplo: Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}$ usando o Teorema 4 e sabendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Para poder usar o teorema devemos decompor a seqüência $\{\frac{2n+1}{n+1}\}$ em partes que contenham a seqüência $\{\frac{1}{n}\}$. Para fazer estas manipulações algébricas é importante ter estudado o Tópico 1 e ganhar alguma habilidade. Note que $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n(2+1/n)}{n(1+1/n)} = \frac{(2+1/n)}{(1+1/n)}$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+1/n)}{(1+1/n)} = \frac{(2+0)}{(1+0)} = 2 \text{ se usamos o Teorema 4.}$$

Tipos de indeterminações para limites.

1- Tipo $(\infty - \infty)$. Exemplos:

- a) Se $x_n = n + 1$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 1$.
- b) Se $x_n = 2n$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = +\infty$.
- c) Se $x_n = n + (-1)^{n+1}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$, que não tem limite (+1 se n é ímpar e -1 se n é par).

Estes três casos mostram que a diferença entre duas sucessões divergentes pode ser convergente ou divergente. Nestes casos dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$ apresenta uma indeterminação do tipo $(\infty - \infty)$.

2- Tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Exemplos:

- a) Se $x_n = n$ e $y_n = n^2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- b) Se $x_n = n^2$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.
- c) Se $x_n = an$ ($a > 0$) e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

Estes três casos mostram que o cociente de duas sucessões divergentes pode ser convergente ou divergente. Nestes casos dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$.

3- Tipo $(0 \cdot \infty)$. Exemplos:

- a) Se $x_n = \frac{1}{n^2}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- b) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.
- c) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

Aqui o produto de sucessão convergente a zero e outra divergente pode convergir ou divergir. Neste caso dizemos que temos uma indeterminação do tipo $(0 \cdot \infty)$.

4- Tipo $(\frac{0}{0})$. Exemplos:

- a) Se $x_n = \frac{1}{n^2}$ e $y_n = \frac{1}{n}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
 b) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n^2}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.
 c) Se $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = (-\frac{1}{n})^n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ e $\frac{x_n}{y_n} = n^{(n-1)}(-1)^n$, que não possui limite.

Nestes casos o cociente de sucesões convergentes a zero pode convergir ou divergir. Esta indeterminação é do tipo $(\frac{0}{0})$.

A seguir apresentamos sem prova uma propriedade dos números reais.

Teorema 5 (Propriedade) *Todo número real pode ser expressado como sendo o limite de uma sucesão de números racionais.*

5- Tipo 1^∞ . Exemplos:

O número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71828182845\dots$. Este número é irracional e trascendental, ou seja, não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.

Teorema 6 (Bolzano-Cauchy) *Uma sucesão $\{x_n\}$ tem limite finito se e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um natural N tal que a desigualdade $|x_n - x_m| < \epsilon$ é verificada sempre que $n \geq N$ e $m \geq N$.*

Note que neste criterio de convergencia não é necessario conhecer o limite l da sucesão $\{x_n\}$.

Teorema 7 (Limite em igualdades) *Se duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são tais que $x_n = y_n$ para quase todo n (todo n exceto um número finito de termos ou elementos), e se $\{x_n\}$ é convergente (possue limite finito), então $\{y_n\}$ é convergente e os limites são iguais: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.*

Teorema 8 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências convergentes. Se $x_n \geq y_n$ para quase todo n e se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, então $a \geq b$.*

Teorema 9 (Confronto ou Sanduiche) *Se as sequências $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ são tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para quase todo n e se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, então a sequência $\{y_n\}$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.*

Exemplo: Seja $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+j}}$. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

Como $\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ para todo $1 \leq j \leq n$ segue que $y_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$. Logo temos que $x_n \leq y_n$ para quase todo n . $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$. Por outra parte temos que como $\frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \leq$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ para todo $1 \leq j \leq n$ segue que $y_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+j}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$. Logo temos que $y_n \leq z_n$ para quase todo n . $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$. Então temos duas sequências $\{x_n\}$ e $\{z_n\}$ são tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para quase todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$, logo aplicando o teorema do confronto obtemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

3.2 - Limites de funções. Limites laterais. Infinitésimos e Infinitos. Teoremas sobre limites. Indeterminações.

Definição 5 (Limite de uma função segundo Heine) Seja $f(x)$ uma função real definida em X e seja 'a' ponto de acumulação de X . Dizemos que o número l é o limite da função f quando x tende para a , se para toda sucesão $\{x_n\}$, tal que $x_n \in X$, $x_n \rightarrow a$ e $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$, a sucesão de números $\{f(x_n)\}$ converge ao número l , isto é, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Note que não faz sentido achar o limite de uma função num ponto que não seja de acumulação do domínio de definição de f . Também, o limite da função f no ponto a não depende da sucesão $\{x_n\}$ eleita, ou seja, qualquera que seja a sucesão $\{x_n\}$ que cumpre com as condições da definição de limite a sucesão $\{f(x_n)\}$ é convergente e seu limite é o mesmo. Para provar que uma função $f(x)$ não possui limite quando $x \rightarrow a$, basta encontrar uma sucesão $\{x_n\}$ que verifique as condições da definição de limite e tal que não seja convergente, ou então duas sucesões $\{x_n\}$ e $\{\bar{x}_n\}$ tais que $\{f(x_n)\}$ e $\{f(\bar{x}_n)\}$ converjam a limites diferentes.

Exemplo: Seja $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Seu gráfico pode ser esboçado como:

Qual será o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Intuitivamente podemos pensar que não deve existir este limite, uma vez que ao nos aproximar mais e mais do ponto $x = 0$, a frequência da oscilação aumenta de forma tal que nos dificulta dizer qual deve ser o valor no limite. Para provar nossa intuição escolha duas sucesões convergentes ao número zero e tal que tenham limites diferentes: $x_n = \frac{1}{\pi n}$ e $\bar{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Estas duas sucesões verificam que: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = 0$ e $x_n \neq 0$, $\bar{x}_n \neq 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Além disto temos,

$$f(x_n) = \sin(\pi n) = 0 \text{ se } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(\bar{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ se } n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = 1$, conseqüentemente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

A partir desta definição de limite de uma função podemos deduzir as propriedades aritmeticas para o limite de funções num ponto através das propriedades do limite das sucesões.

Teorema 10 Se existem os $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, então:

$$i) \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x)f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}, \text{ sempre que } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0.$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \text{ sempre que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$$

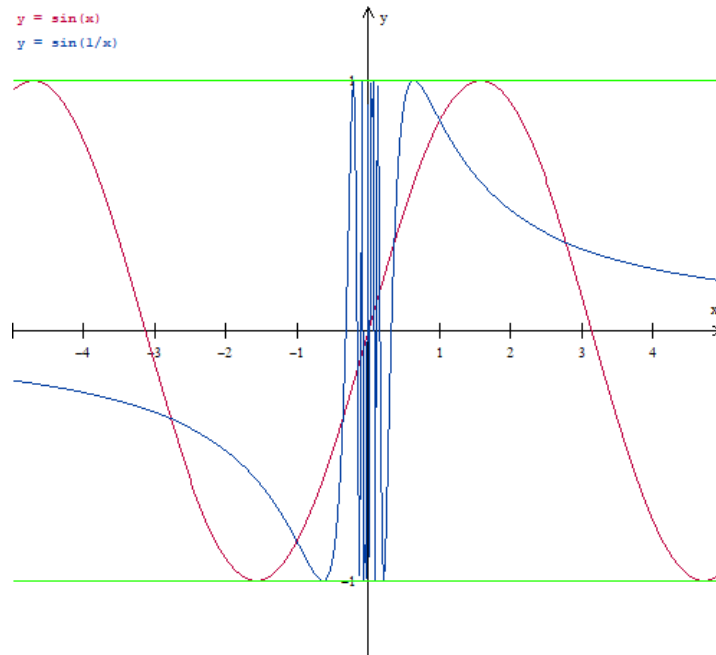


Figure 4: Representação gráfica das funções $\sin(x)$ e $\sin(\frac{1}{x})$.

Limites laterais.

Definição 6 Se $x < a$ e $x \rightarrow a$, é denotado por $x \rightarrow a^-$, significando que x tende ao número a pela esquerda. Similarmente, se $x > a$ e $x \rightarrow a$, é denotado por $x \rightarrow a^+$, significando que x tende ao número a pela direita.

Definição 7 Nós chamamos respectivamente de limites laterais pela esquerda e pela direita da função $f(x)$ no ponto a , os números denotados por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$, sempre que estes números existam.

Teorema 11 A função $f(x)$ possui limite quando $x \rightarrow a$, se e somente se, existem os limites laterais no ponto a , e eles são iguais. Isto é: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$.

Exemplo: $y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Esta função é chamada de sinal de x e seu gráfico pode ser visto na Figura 5. Para mostrar que não existe o limite quando x tende para zero usaremos o teorema anterior. Isto é, mostraremos que os limites laterais existem, mas são diferentes. Para isto encontraremos duas sequências no domínio que se aproximam de zero: x_n pelo lado direito de zero e $\bar{x}_n$ pelo lado esquerdo de zero. Depois será mostrado que os limites das sequências imagens são diferentes.

Sejam $x_n = \frac{1}{n} > 0$ e $\bar{x}_n = -\frac{1}{n} < 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sgn}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sgn}(\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sgn}(\bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sgn}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$. Isto significa que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1$. Neste caso, a função não

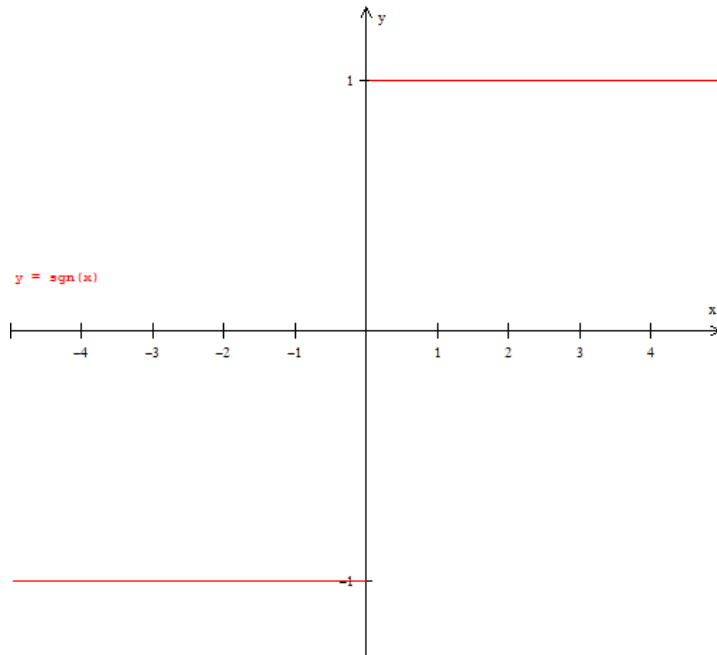


Figure 5: Representação gráfica da função $\text{sgn}(x)$.

possue limite no ponto $x = 0$, e dizemos que a mesma apresenta um salto determinado por

$$\left| \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right| = d.$$

Definição 8 (Limite de uma função segundo Cauchy) Dizemos que uma função $f(x)$ tende ao número l ($f(x) \rightarrow l$) quando x tende ao número a ($x \rightarrow a$), denotado por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, se para qualquer $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$) existe um número real $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$.

Note que pela definição l é limite de f quando $x \rightarrow a$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se x pertence a vizinhança $V(a, \delta)$, então o valor da função neste ponto pertence a vizinhança $V(l, \epsilon)$. Isto pode ser visto geometricamente como:

Falta uma figura exemplificando.

Exemplo: Usando a definição de limite segundo Cauchy prove que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Pela definição, $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 3| < \delta$ então $|x^2 - 9| < \epsilon$. Como $|x^2 - 9| = |x - 3| |x + 3|$, suponha agora que $|x - 3| < \delta$, então pela desigualdade triangular $|x^2 - 9| \leq |x - 3| (|x| + |3|) < \delta(|x| + |3|)$. Como $|x - 3| < \delta$ então $-\delta < x - 3 < \delta$ e consequentemente $3 - \delta < x < \delta + 3$. Como o número $3 - \delta > -(\delta + 3)$ então temos $-(\delta + 3) < x < (\delta + 3)$ e consequentemente $|x| < \delta + 3$, portanto $|x^2 - 9| < \delta(\delta + 6)$.

Para que $\delta(\delta + 6) < \epsilon$ basta que $\delta < \sqrt{\epsilon + 9} - 3$, já que $\delta(\delta + 6) < (\sqrt{\epsilon + 9} - 3)(\sqrt{\epsilon + 9} + 3) = (\epsilon + 9) - 9 = \epsilon$. Assim, temos provado que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \sqrt{\epsilon + 9} - 3$, tal que se $|x - 3| < \delta$, então $|x^2 - 9| < \epsilon$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Similarmente, é definido o limite quando $x \rightarrow \infty$ como: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$, se $|f(x) - A| < \epsilon$ para $|x| > N(\epsilon)$. Quando A é um número real a função tem limite.

Similarmente a como foi definido para sequências, também encontramos a seguinte notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, que significa, que $|f(x)| > E$ se $0 < |x - a| < \delta(E)$, onde E representa um número positivo arbitrário. Entretanto, neste caso a função não tem limite.

O critério de convergência de Bolzano-Cauchy também existe para as funções reais.

Teorema 12 (Critério de convergência de Bolzano-Cauchy) *Uma função f tem limite finito quando $x \rightarrow a$, se e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que se $\hat{x}, \bar{x} \in \text{Dom} f$ e $|\bar{x} - \hat{x}| < \delta$ então $|f(\bar{x}) - f(\hat{x})| < \epsilon$.*

3.3 - Métodos para resolver limites indeterminados.

Infinitesimos e infinitos.

Definição 9 *Se $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, ou seja, se $|\alpha(x)| < \epsilon$, quando $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$, a função $\alpha(x)$ é chamada de infinitesima ou infinitamente pequena quando $x \rightarrow a$.*

Similarmente é definida a função infinitesima quando $x \rightarrow \infty$.

Algumas propriedades para as funções infinitesimas.

P1) A soma e o produto de um número finito de infinitesimos, quando $x \rightarrow a$, também é um infinitesimo quando $x \rightarrow a$. Isto é,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = \beta(x), \quad (1)$$

$$\prod_{i=1}^n \alpha_i(x) = \gamma(x). \quad (2)$$

P2) Se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são infinitesimas quando $x \rightarrow a$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, onde C é um número diferente de zero, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são chamadas de infinitesimas da mesma ordem. Se $C = 0$, dizemos que a função $\alpha(x)$ é uma infinitesima de ordem superior a $\beta(x)$.

A função $\alpha(x)$ é dita ser infinitesima de ordem n respeito à função $\beta(x)$ se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C$, onde $0 < |C| < +\infty$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são ditas ser equivalentes quando $x \rightarrow a$, ou seja, $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Exemplo: $\text{sen}(x) \sim x$ quando $x \rightarrow 0$.

Usando as propriedades das funções trigonométricas temos:

$$0 < \text{sen}(x) < x < \text{tg}(x) \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \quad (3)$$

Como neste intervalo $\text{sen}(x) \neq 0$ podemos dividir por ele, e sabendo que neste intervalo $\text{sen}(x) > 0$ segue

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)} \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ ou } \quad (4)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \quad (5)$$

Note que as funções 1 , $\frac{x}{\sin(x)}$ e $\frac{1}{\cos(x)}$ são pares, ou seja, $f(x) = f(-x)$. Portanto, a desigualdade vale também para o intervalo $] -\frac{\pi}{2}, 0[$. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ e que a função $\frac{x}{\sin(x)}$ é limitada, pelo teorema do confronto segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \text{ ou } \quad (6)$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} < 1. \quad (7)$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$. O mesmo resultado é obtido para $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Portanto, as funções $\sin(x)$ e x são equivalentes quando $x \rightarrow 0$. Na Figura 6 pode ser visto que quando estamos perto de $x = 0$ os gráficos das funções $\sin(x)$ e x são muito próximos.

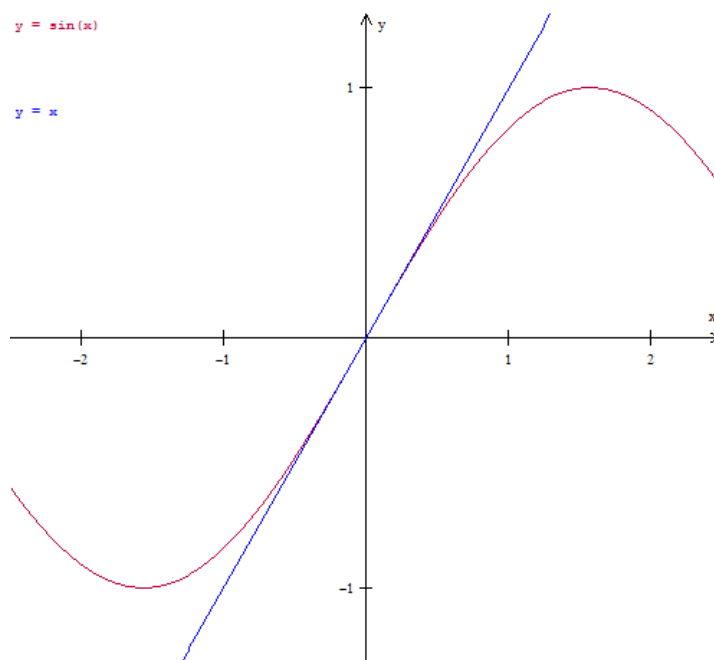


Figure 6: Representação gráfica das funções $\sin(x)$ e x .

Exemplo: $\ln(1+x) \sim x$ quando $x \rightarrow 0$. O cálculo deste exemplo será feito mais adiante. Aqui vamos mostrar apenas a representação gráfica. Na Figura 7 pode ser visto que quando estamos perto de $x = 0$ os gráficos das funções $\ln(1+x)$ e x são muito próximos.

P3) A soma de dois infinitesimos de ordem diferentes, equivale ao somando cujo ordem é inferior.

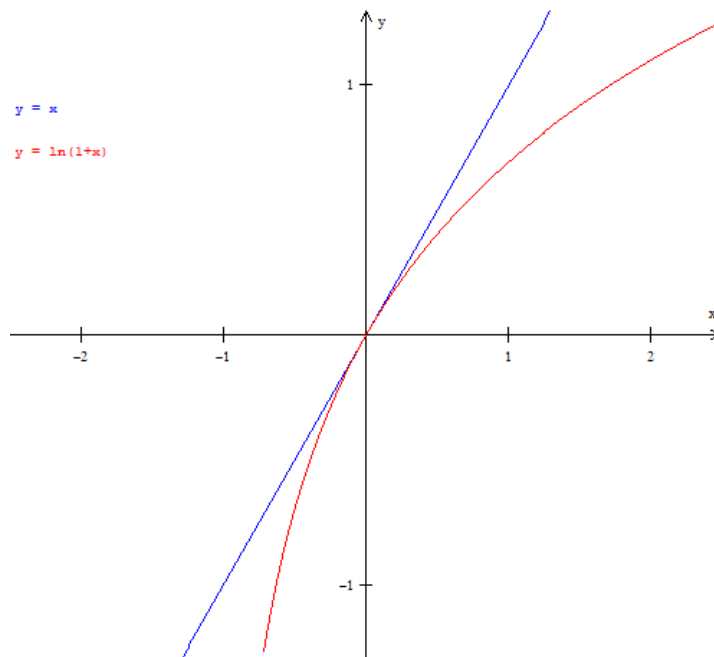


Figure 7: Representação gráfica das funções $\ln(1+x)$ e x .

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2$. Isto é, $(x^2 + x^3) \sim x^2$ quando $x \rightarrow 0$, já que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x^2 + x^3)} = 1$.

P4) O limite da razão de dois infinitesimos não se altera, se seus termos são substituídos por outros cujos valores respectivos sejam equivalentes.

Segundo esta propriedade ao determinar o limite da fração $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, onde $\alpha(x) \rightarrow 0$ e $\beta(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow a$, podemos somar (subtrair) ao numerador e denominador da fração infinitesimos de ordem superior, de forma tal que, as quantidades resultantes sejam equivalentes às anteriores.

Exemplo: Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)}$.

Note $x^3 + 2x^4 \sim x^3$ quando $x \rightarrow 0$, e $\ln(1+2x) \sim 2x$ quando $x \rightarrow 0$. Logo, usando a P4 segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Infinitos.

Definição 10 Se para um número qualquer N , tão grande como se queira, existe um $\delta(N)$, tal que para $0 < |x - a| < \delta(N)$ é verificada a desigualdade $|f(x)| > N$, então a função $f(x)$ é chamada de infinita ou infinitamente grande quando $x \rightarrow a$.

De forma semelhante se define $f(x)$ como infinita quando $x \rightarrow \infty$. O conceito de infinitos de varias ordens é definido de maneira analoga a como foi feito para os infinitesimos.

A seguir alguns exemplos de limites que aparecem com muita frequência e dicas para calcular limites de funções.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e = 2,718... . \text{ Este número é um exemplo de número}$$

irracional, chamado de número de Neper, e denotado pela letra e .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

Indeterminações do Tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Muitas vezes quando precisamos determinar o limite da razão de dois polinômios inteiros respeito a x (as potências de x são números inteiros), quando $x \rightarrow \infty$, é conveniente dividir os dois polinômios pela maior potência destes polinômios. Também, quando se tem uma fração de expressões irracionais podemos usar um procedimento análogo.

Exemplo:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-\frac{3}{x})(3+\frac{5}{x})(4-\frac{6}{x})}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2-\frac{3}{x})(3+\frac{5}{x})(4-\frac{6}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8.$$

Exemplo:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = 1.$$

Indeterminações do Tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Quando os polinômios inteiros $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que no ponto $x = a$, $P(a) \neq 0$ e $Q(a) \neq 0$ não existe indeterminação, então o limite da fração racional $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ é calculado de forma direta. No caso que no ponto $x = a$, $P(a) = Q(a) = 0$, existe a indeterminação e é conveniente simplificar a fração $\frac{P(x)}{Q(x)}$, pelo binômio $(x - a)$, uma ou várias vezes.

Exemplo:
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4.$$

As expressões irracionais podem ser reduzidas muitas vezes, a uma forma racional introduzindo um câmbio de variável.

Exemplo:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}. \text{ Introduzindo ou definindo } 1+x = y^6 \text{ temos } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

Outro procedimento muito útil na hora de determinar o limite de uma expressão irracional, consiste em trasladar a parte irracional do numerador para o denominador, ou então, ao contrário, do denominador para o numerador.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0).$$

Indeterminações do Tipo 1^∞ .

Para determinar limites de expressões que possuem a forma $(\varphi(x))^{\psi(x)}$, onde $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são duas funções reais. Devemos considerar que: $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^{\psi(x)} = C$:

1) Se existem os limites $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$, onde A e B são dois números reais

finitos, então não existe indeterminação e o limite se determina de forma direta $C = A^B$.

Exemplo: Determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^{1+x}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$, portanto $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^{1+x} = 2^1 = 2$.

2) Se $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$ existe a indeterminação, e podemos supor que $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, onde $\alpha(x) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow a$ e conseqüentemente, $C = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)-1)\psi(x)}$. Desta forma trocamos a indeterminação Tipo 1^∞ por outra Tipo $(0 \cdot \infty)$.

Exemplo: Determinar $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \right) = 1$. Fazendo as transformações do item 2) teremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1 \right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{2}{x+1} \right) \right)^{-\frac{x+1}{2}} \right]^{-\frac{2x}{1+x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

Neste caso em particular, o limite pode ser determinado por outro caminho da seguinte forma.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right]^{-1}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

3) Se $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \pm\infty$, então não existe indeterminação e o limite $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)-1)\psi(x)$ se determina de forma direta.

Exemplo: Determinar $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty, \text{ portanto } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = 0.$$

Resulta muito conveniente lembrar sempre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$, onde k é um número real fixo.

Também, é muito útil lembrar na hora de determinar certos limites, que se existe e é positivo o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$.

Exemplo: Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \left(1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = \log_e e = 1$. Este cálculo prova que $\ln(1+x) \sim x$ quando $x \rightarrow 0$.

Referências Bibliográficas

- 1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.
- 2- Serge Lang, Cálculo, V1.
- 3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.
- 4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.
- 5- Diva Marília Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.
- 6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.
- 7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.

- 8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.
- 9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.
- 10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.
- 11- G. Baranenko, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.