

1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.1- Matrizes e Vetores

Muitos problemas podem ser reduzidos a um sistema linear de m equações algébricas com n incógnitas.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ou } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

1.1- Matrizes e Vetores

Processamento de Imagens: reconhecimento de padrões, aprendizagem de máquina.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pixel: menor parte de uma imagem



Imagem Binária

Matriz Numérica

Imagem gerada por
Computação Gráfica

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz é um conjunto de números arranjados em forma retangular com m linhas e n colunas.

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem $m \times n$, onde a_{ij} são os elementos.

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $m=n$ a matriz é chamada quadrada de ordem n .

1.1.1- Definições Básicas

Se $m=1$ a matriz é chamada vetor linha. Se $n=1$ a matriz é chamada vetor coluna.

$$\mathbf{A}_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

Matriz de ordem $1 \times n$,
vetor linha.

$$\mathbf{A}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem $m \times 1$,
vetor coluna.

Note que um escalar (número) pode ser representado como uma matriz de ordem 1×1 .

$$\mathbf{A}_{1 \times 1} = [a_{11}]$$

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz quadrada da forma

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada matriz diagonal. Se $a_{ij}=1$ temos a matriz identidade ou unidade:

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{n \times n} = \mathbf{I}_{n \times n}$$

Uma matriz com todos seus elementos zeros é chamada matriz zero e denotada por $\mathbf{0}_{m \times n}$.

1.1.1- Definições Básicas

Uma matriz quadrada é chamada matriz triangular superior (inferior) se os elementos abaixo (acima) da diagonal principal são zeros.

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

1.1.2- Operações com Matrizes

Duas matrizes são dita ser iguais se tem a mesma ordem e seus elementos são todos iguais.

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{m \times n} \text{ se } a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Se define a soma entre duas matrizes da mesma ordem:

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{C}_{m \times n} \text{ tal que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Similarmente se define a diferença entre duas matrizes da mesma ordem.

1.1.2- Operações com Matrizes

Da definição de soma de matrizes seguem as propriedades:

$$\mathbf{A}_{m \times n} + (\mathbf{B}_{m \times n} + \mathbf{C}_{m \times n}) = (\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n}) + \mathbf{C}_{m \times n}$$

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n} = \mathbf{B}_{m \times n} + \mathbf{A}_{m \times n}$$

$$\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$$

Se define a multiplicação de uma matrizes por um escalar

$$\alpha \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Da definição anterior seguem as propriedades:

$$1\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$$

$$0\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{0}_{m \times n}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}_{m \times n}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}_{m \times n}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A}_{m \times n} = \alpha\mathbf{A}_{m \times n} + \beta\mathbf{A}_{m \times n}$$

$$\alpha(\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n}) = \alpha\mathbf{A}_{m \times n} + \alpha\mathbf{B}_{m \times n}$$

Se define a multiplicação entre duas matrizes como:

$$\mathbf{A}_{m \times q} \mathbf{B}_{q \times n} = \mathbf{C}_{m \times n} \text{ onde } (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{l=1}^q a_{il}b_{lj}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Ou seja: $\mathbf{A}_{m \times q} \mathbf{B}_{q \times n} = \mathbf{C}_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Desta definição seguem as propriedades:

$$\mathbf{A}_{m \times p} (\mathbf{B}_{p \times q} \mathbf{C}_{q \times n}) = (\mathbf{A}_{m \times p} \mathbf{B}_{p \times q}) \mathbf{C}_{q \times n}$$

$$\alpha (\mathbf{A}_{m \times p} \mathbf{B}_{p \times n}) = (\alpha \mathbf{A}_{m \times p}) \mathbf{B}_{p \times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m \times p} + \mathbf{B}_{m \times p}) \mathbf{C}_{p \times n} = \mathbf{A}_{m \times p} \mathbf{C}_{p \times n} + \mathbf{B}_{m \times p} \mathbf{C}_{p \times n} = \mathbf{D}_{m \times n}$$

$$\mathbf{C}_{q \times m} (\mathbf{A}_{m \times p} + \mathbf{B}_{m \times p}) = \mathbf{C}_{q \times m} \mathbf{A}_{m \times p} + \mathbf{C}_{q \times m} \mathbf{B}_{m \times p} = \mathbf{D}_{q \times p}$$

1.1.2- Operações com Matrizes

Note que o produto de duas matrizes não é sempre comutativo:

$$\mathbf{A}_{m \times q} \mathbf{B}_{q \times n} = \mathbf{C}_{m \times n} \neq \mathbf{B}_{q \times n} \mathbf{A}_{n \times p} = \tilde{\mathbf{C}}_{q \times p}$$

Quando $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times m} = \mathbf{B}_{n \times m} \mathbf{A}_{m \times n}$ se diz que as matrizes são comutativas ($m=n$). Por exemplo, a matriz identidade de ordem n é comutativa com toda matriz quadrada da mesma ordem e verifica:

$\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{E}_{n \times n} = \mathbf{E}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A}_{n \times n}$. Note que a matriz identidade cumpre o rol da unidade no produto.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{B}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{C}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 6 & 7 \\ 16 & 17 \end{array} \right] \end{array} \neq \begin{array}{c} \mathbf{B}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{C}}_{2 \times 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 13 & 20 \\ 7 & 10 \end{array} \right] \end{array}$$

1.1.3- Matriz Transposta

Se define a matriz transposta como a troca das linhas pelas colunas de uma matriz:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como caso particular a transposta de um vetor linha é um vetor coluna e vice-versa. Da definição seguem as propriedades:

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m \times n})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}_{m \times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m \times n} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m \times n}$$

$$(\mathbf{A}_{m \times m} \mathbf{B}_{m \times m})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}_{m \times m} \mathbf{A}^{\mathbf{T}}_{m \times m}$$

1.1.3- Matriz Transposta

Se diz que uma matriz é simétrica se ela é igual a sua transposta: $\mathbf{A}_{m \times m}^T = \mathbf{A}_{m \times m}$ (tem que ser uma matriz quadrada)

$$\mathbf{A}_{m \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{m \times m}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$. Note que o produto de uma matriz por sua transposta é sempre uma matriz simétrica porque:

$$\mathbf{B}_{m \times m} = \mathbf{A}_{m \times m} \mathbf{A}_{m \times m}^T = (\mathbf{A}_{m \times m}^T)^T \mathbf{A}_{m \times m}^T = (\mathbf{A}_{m \times m} \mathbf{A}_{m \times m}^T)^T = \mathbf{B}_{m \times m}^T$$

onde foram usadas as propriedades

$$(\mathbf{A}_{m \times n}^T)^T = \mathbf{A}_{m \times n} \quad (\mathbf{A}_{m \times m} \mathbf{B}_{m \times m})^T = \mathbf{B}_{m \times m}^T \mathbf{A}_{m \times m}^T$$

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Uma matriz quadrada tem inversa se seu produto pela direita e pela esquerda com esta matriz produz a matriz identidade:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} = \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{E}_{n \times n}$$

A toda matriz quadrada pode ser associado um número chamado de determinante da matriz e definido como:

$$\det \mathbf{A}_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\mathfrak{N}} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

onde a soma é realizada sobre todas as permutações de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dos elementos $1, 2, \dots, n$ e \mathfrak{N} é 0 se a permutação é par e 1 se é ímpar.

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Exemplo:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} (-1)^{s} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} +$$
$$(-1)^0 a_{12} a_{22} a_{31} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{32} + (-1)^0 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^1 a_{13} a_{22} a_{31}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{32} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$\det \mathbf{E}_{n \times n} = 1$$

Para duas matrizes quadradas da mesma ordem se verifica:

$$\det(\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{B}_{n \times n}) = \det(\mathbf{B}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n}) = \det \mathbf{A}_{n \times n} \det \mathbf{B}_{n \times n}$$

1.1.4- Matriz Inversa e Determinante

Uma matriz quadrada é dita ser singular se seu determinante é zero. Caso contrário é dita ser não singular.

Teorema: Toda matriz quadrada não singular possui uma inversa (única).

Algumas propriedades de uma matriz inversa:

$$1- \det \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} \det \mathbf{A}_{n \times n} = 1 \quad \text{ou} \quad \det \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} = 1 / \det \mathbf{A}_{n \times n}$$

$$2- (\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{B}_{n \times n})^{-1} = \mathbf{B}_{n \times n}^{-1} \mathbf{A}_{n \times n}^{-1}$$

$$3- (\mathbf{A}_{n \times n}^{-1})^T = (\mathbf{A}_{n \times n}^T)^{-1}$$

Note que as equações $\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{X}_{n \times n} = \mathbf{B}_{n \times n}$ e $\mathbf{Y}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{B}_{n \times n}$

podem ser resolvidas através da inversa se $\det \mathbf{A}_{n \times n} \neq 0$

$$\mathbf{X}_{n \times n} = \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} \mathbf{B}_{n \times n} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_{n \times n} = \mathbf{B}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n}^{-1}$$

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

A desigualdade $\mathbf{A}_{m \times n} \leq \mathbf{B}_{m \times n}$ entre matrizes da mesma ordem significa que $a_{ij} \leq b_{ij}$. Se define $|\mathbf{A}_{m \times n}|$ como a matriz cujos elementos são $|a_{ij}|$. Se $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{m \times n}$ são matrizes para as quais faz sentido as operações de soma e produto, então:

$$|\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n}| \leq |\mathbf{A}_{m \times n}| + |\mathbf{B}_{m \times n}|$$

$$|\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{m \times n}| \leq |\mathbf{A}_{m \times n}| |\mathbf{B}_{m \times n}|$$

$$|\alpha \mathbf{A}_{m \times n}| \leq |\alpha| |\mathbf{A}_{m \times n}| \quad \text{com } \alpha \text{ sendo um escalar.}$$

Observe que estas definições são construídas de forma a preservar os conhecimentos que se verificam para os números (escalares - Matriz de ordem 1).

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Definimos como norma de uma matriz um número real $\|\mathbf{A}_{m \times n}\|$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\|\mathbf{A}_{m \times n}\| \geq 0$ com $\|\mathbf{A}_{m \times n}\| = 0$ se e somente se $\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{0}_{m \times n}$

b) $\|\alpha \mathbf{A}_{m \times n}\| \leq |\alpha| \|\mathbf{A}_{m \times n}\|$

c) $\|\mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{B}_{m \times n}\| \leq \|\mathbf{A}_{m \times n}\| + \|\mathbf{B}_{m \times n}\|$

d) $\|\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{m \times n}\| \leq \|\mathbf{A}_{m \times n}\| \|\mathbf{B}_{m \times n}\|$

Note que usando c) segue:

$$\|\mathbf{B}_{m \times n}\| = \|\mathbf{A}_{m \times n} + (\mathbf{B}_{m \times n} - \mathbf{A}_{m \times n})\| \leq \|\mathbf{A}_{m \times n}\| + \|\mathbf{B}_{m \times n} - \mathbf{A}_{m \times n}\|$$

$$\text{logo } \|\mathbf{A}_{m \times n} - \mathbf{B}_{m \times n}\| = \|\mathbf{B}_{m \times n} - \mathbf{A}_{m \times n}\| \geq \|\mathbf{B}_{m \times n}\| - \|\mathbf{A}_{m \times n}\|$$

$$\text{Similarmente } \|\mathbf{A}_{m \times n} - \mathbf{B}_{m \times n}\| \geq \|\mathbf{A}_{m \times n}\| - \|\mathbf{B}_{m \times n}\| \text{ logo}$$

$$\|\mathbf{A}_{m \times n} - \mathbf{B}_{m \times n}\| \geq \|\mathbf{B}_{m \times n}\| - \|\mathbf{A}_{m \times n}\|$$

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Entre todas as normas possíveis $\|\mathbf{A}_{p \times q}\|$ destacamos três:

$$1) \|\mathbf{A}_{p \times q}\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (\text{m-norma})$$

$$2) \|\mathbf{A}_{p \times q}\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (\text{l-norma})$$

$$3) \|\mathbf{A}_{p \times q}\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \quad (\text{k-norma})$$

Estas normas também são conhecidas com outros nomes, e foram redefinidas em:

Alvarez, G.B., de Almeida, R.G., Hernández, C.T. and de Sousa, P.A.P. (2025) 'The synthesis of the AHP as a well-posed mathematical problem and matrix norms appropriate for sensitivity analysis via condition number', Int. J. Mathematics in Operational Research, Vol. 30, No. 1, pp.111–134.

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Normas Clássicas: Euclidiana (2), Soma máxima absoluta de colunas (1), Soma máxima absoluta de linhas (∞), Frobenius (F) e Máximo (max).

Normas Ponderadas: Euclidiana, Soma máxima absoluta de colunas, Soma máxima absoluta de linhas e Frobenius.

Classical Norm	Weighted Norm
$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _2 = \sum_{j=1}^A \sqrt{\sum_{i=1}^C \mathbf{c}_{ij} ^2}$	$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{w2} = \frac{1}{AC} \ \mathbf{C}_{C,A}\ _2$
$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _1 = \max_{1 \leq i \leq C} \left\{ \sum_{j=1}^A \mathbf{c}_{ij} \right\}$	$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{w1} = \frac{1}{A} \ \mathbf{C}_{C,A}\ _1$
$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _\infty = \max_{1 \leq j \leq A} \left\{ \sum_{i=1}^C \mathbf{c}_{ij} \right\}$	$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{w\infty} = \frac{1}{C} \ \mathbf{C}_{C,A}\ _\infty$
$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _F = \sqrt{\sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^A \mathbf{c}_{ij} ^2}$	$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{wF} = \frac{1}{AC} \ \mathbf{C}_{C,A}\ _F$
$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq C \\ 1 \leq j \leq A}} \{ \mathbf{c}_{ij} \}$	$\ \mathbf{C}_{C,A}\ _{w \max} = \ \mathbf{C}_{C,A}\ _{\max}$

1.1.5- Valor Absoluto e Norma de uma Matriz

Exemplo: $\mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{A}_{2 \times 2}\|_m = \max_i \{3, 7\} = 7 \quad (\text{m-norma})$$

$$\|\mathbf{A}_{2 \times 2}\|_l = \max_j \{4, 6\} = 6 \quad (\text{l-norma})$$

$$\|\mathbf{A}_{p \times q}\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \quad (\text{k-norma})$$

Outro exemplo, agora para a matriz identidade $\mathbf{E}_{n \times n}$:

$$\|\mathbf{E}_{n \times n}\|_m = 1 \quad (\text{m-norma})$$

$$\|\mathbf{E}_{n \times n}\|_l = 1 \quad (\text{l-norma})$$

$$\|\mathbf{E}_{n \times n}\|_k = \sqrt{n} \quad (\text{k-norma})$$

1.1.6- Rank de uma Matriz

Seja uma matriz retangular de ordem $m \times n$. Chamamos Menor de ordem k desta matriz ao determinante da matriz de ordem k formada pela escolha arbitrária de k linhas e k colunas, onde $k \leq \min(m, n)$

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Menor de Ordem 2

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix}$$

Definição: O Rank de uma matriz é a ordem do maior Menor não nulo da matriz. Ou seja, a matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ tem Rank r se:

- 1- existe pelo menos um Menor de ordem r diferente de zero,
- 2- todos os Menores de ordem maior ou igual a $r+1$ são zero.

1.1.6- Rank de uma Matriz

Em outras palavras, o Rank corresponde ao número de linhas e colunas linearmente independentes da matriz. O Rank da matriz zero é definido como zero. Note que o Rank da Matriz Identidade de ordem n é n .

$$\mathbf{A}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad \det \mathbf{A}_{4 \times 4} = 0$$

Logo o Rank de $\mathbf{A}_{4 \times 4}$ é 3.

1.1.7- Transformações Elementares de uma Matriz

1- Intercambio de duas linhas ou duas colunas.

2- Produto de todos os elementos de uma linha (coluna) pelo mesmo número diferente de zero.

3- Soma dos elementos de uma linha (coluna) pelos elementos de outra linha (coluna).

Duas matrizes são dita ser equivalentes se uma pode ser obtida a partir da outra através de um número finito de transformações elementares.

As matrizes equivalentes não são iguais, mas tem o mesmo Rank.

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{A}_{3 \times 3} \quad \text{Rank}=3$$

1.1.8- Independência Linear e Base

Um conjunto de vetores \mathbf{x}^j , com $j = 1, \dots, m$ é dito ser linearmente dependente se $\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}^m = 0$

para algum escalar $\alpha_j \neq 0$. Ou seja, se algum destes vetores é uma combinação linear dos outros. Caso contrário se diz que os vetores são linearmente independentes.

Teorema: Um espaço de n dimensão tem no máximo n vetores linearmente independentes.

Definição: Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes de um espaço de dimensão n é uma base deste espaço.

Teorema: Todo vetor de um espaço de dimensão n pode ser representado de forma única como combinação linear dos vetores de uma base.

1.1.9- Produto Escalar (Interno)

Sejam os vetores de números complexos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Se define o produto escalar como o número

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \text{ onde } y_i^* \text{ é o complexo conjugado.}$$

Propriedades do Produto Escalar:

1- Positivo definido $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2- Simetria Hermitiana $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^*$.

3- $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ onde α é um escalar.

Definição: Dois vetores são dito ser ortogonais se seu produto escalar é zero: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

1.1.10- Alguns Propriedades de uma Matriz

Matriz Não Singular	Matriz Singular
Tem inversa	Não tem inversa
As colunas são independentes	As colunas são dependentes
As linhas são independentes	As linhas são dependentes
O determinante é não zero	O determinante é zero
$Ax=0$ tem uma única solução $x=0$	$Ax=0$ tem infinitas soluções
$Ax=b$ tem uma única solução $x=A^{-1}b$	$Ax=b$ não tem solução ou tem infinitas
A tem n pivôs (não zero)	A tem $r < n$ pivôs
Rank = n ordem da matriz	Rank $< n$
Todos os autovalores são não zero	Zero é um dos autovalores da matriz
$A^T A$ é simétrica e definida positiva	$A^T A$ não é definida positiva

Frase do Dia

“Number rules the Universe.”

The Pythagoreans

Comentário sobre os números racionais e irracionais.