

Nova forma de fazer diferenças finitas: método completo de diferenças finitas para a equação de Helmholtz

Gustavo Benitez Alvarez,

Helder da F. Nunes, Welton A. de Menezes.

PPG-Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Universidade Federal Fluminense

2025 - Seminários do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Tópicos

- 1 **Introdução**
 - Problema e desafios
- 2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas
 - MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
 - MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
 - MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos
- 3 Resultados Numéricos
 - Casos 2D
 - Erros 2D

Equação escalar de Helmholtz

Harmônicos temporais de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

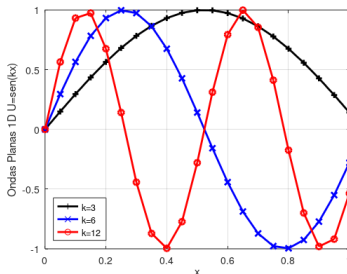
$$\Delta u + k^2 u = f \text{ em } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g \text{ em } \partial\Omega, \quad (2)$$

onde k é o número de onda, Ω é o interior do domínio limitado com contorno Lipschitz $\partial\Omega$, f é um termo fonte e u é o campo escalar que descreve os harmônicos temporais das ondas.

Ondas planas podem ser solução da equação homogênea:

$$u = \cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta)). \quad (3)$$



Desafios

Regra heurística do dedão (*rule of thumb*): $kh = \frac{2\pi}{n}$ quantidade de nós por comprimento de onda $7 \leq n \leq 10$.

Soluções numéricas por Diferenças Finitas e Elementos Finitos são instáveis quando k aumenta, mesmo com kh constante.

Comportamento conhecido como **poluição do erro** que impacta a diferença entre o número de onda exato k e o número de onda numérico k^h .

Para problemas 1D existem MEF que eliminam totalmente a **poluição do erro**: método **GLS** (*Galerkin Least-Squares*), **QSFEM** (*Quasi Stabilized Finite Element Method*), etc.

Para problemas 2D a **poluição do erro** apenas pode ser minimizada: **QSFEM** (*Quasi Stabilized Finite Element Method*), etc.

Aqui é apresentado o **Método Completo de Diferenças Finitas Centradas (MCDFC)**, a qual sempre minimiza a relação de dispersão $k - k^h$ em qualquer dimensão.

Formulação geral (MCDFC - CCFDM).

A dimensão do **espaço de aproximação global** S^G é $\dim(S^G) = N^h$, onde N^h é o número de nós da malha com graus de liberdade.

$TU^h = F$ é o sistema linear de um esquema de diferenças finitas qualquer.

A equação do nó arbitrário I (numeração global) é determinada pelo tipo de estêncil, e as incógnitas U^h dessa equação pertencem ao **subespaço de aproximação local** $S^L \subseteq S^G$ com dimensão $\dim(S^L) = L$, onde L é a quantidade de pontos do estêncil.

A equação do nó I é um produto interno $\langle G, U^h \rangle = f_I$, onde G denota o **vetor gerador** da equação do estêncil.

Um conjunto de **L vetores** L_I **formam uma base para** S^L , e todo vetor desse subespaço é uma combinação linear dos vetores dessa base.

Se os **vetores geradores** G_I **da equação do estêncil de diferentes esquemas são os vetores da base do subespaço** S^L , então o MCDFC pode representar a equação de qualquer esquema no nó I como:

$$E_{MCDFC} := \left\langle \sum_{I=1}^L \alpha_I G_I, U^h \right\rangle = \left(\sum_{I=1}^L \alpha_I \right) f_I, \quad (4)$$

onde α_I são os coeficientes da combinação linear, e são parâmetros livres a determinar minimizando a dispersão.

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

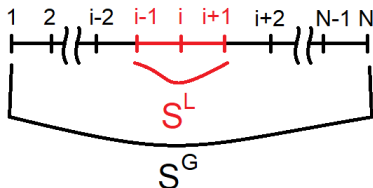
2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Caso 1D e estêncil com 3 pontos.



S^L Subespaço de Aproximação Local

S^G Espaço de Aproximação Global

Figura 1: Espaço de Aproximação Global e Subespaço de Aproximação Local.

$L = \dim(S^L) = 3$, o MCDFC para o nó central i (numeração local) é:

$$\left\langle \sum_{l=1}^3 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := AU_{i-1} + BU_i + CU_{i+1} = \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_l \right) f_i, \quad (5)$$

onde $A = \sum_{l=1}^3 \alpha_l g_{l,1}$, $B = \sum_{l=1}^3 \alpha_l g_{l,2}$ e $C = \sum_{l=1}^3 \alpha_l g_{l,3}$.

Caso 1D e estêncil com 3 pontos.

Os vetores geradores da base $G_l = [g_{l,1}, g_{l,2}, g_{l,3}]$ correspondem aos esquemas CC-1D, NE-1-1D e NE-6-1D da dissertação [3], onde $\frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ e

$$\text{CC-1D: centrado clássico } k^2 u \approx k^2 U_i \Rightarrow G_1 = \frac{1}{h^2} [1, -2 + (kh)^2, 1].$$

$$\text{NE-1-1D: } k^2 u \approx k^2 \frac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2} \Rightarrow G_2 = \frac{1}{h^2} [1 + \frac{(kh)^2}{2}, -2, 1 + \frac{(kh)^2}{2}].$$

$$\text{NE-6-1D: } k^2 u \approx k^2 [U_i + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2}] \Rightarrow G_3 = \frac{1}{h^2} [1 - \frac{(kh)^2}{2}, -2 + (kh)^2, 1 + \frac{(kh)^2}{2}].$$

Os coeficientes da combinação lineares α_l são determinados tomando-se $k = k^h$ na relação de dispersão, onde $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_3 = 0$, pois o vetor G_3 não é necessário para malhas uniformes por motivos de simetria (ver Colorário em [1]).

Caso 1D e estêncil com 3 pontos.

○ MCDFC elimina o efeito de poluição $k^h - k = 0$ com

$$\alpha_2 = \frac{2 - 2 \cos(kh) - k^2 h^2}{\cos(kh)[2 + k^2 h^2] - 2}, \quad (6)$$

$$\log A = C = -\frac{h^2 k^4}{-4 + 2[2 + (kh)^2] \cos(kh)} \text{ e } B = \frac{h^2 k^4 \cos(kh)}{-2 + [2 + (kh)^2] \cos(kh)} = -\frac{1}{2} \cos(kh) A.$$

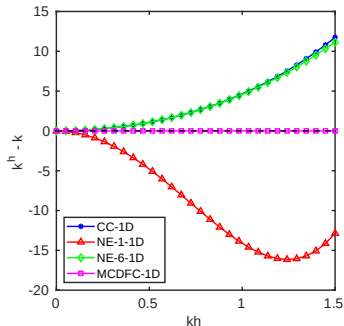


Figura 2: Dispersão de onda para o caso 1D $k = 100$.

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- **MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos**
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Caso 2D e estêncil com 5 pontos.

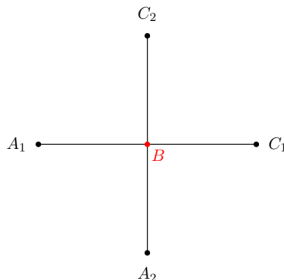


Figura 3: Estêncil de 5 pontos.

$L = \dim(S^L) = 5$, o MCDFC para o nó central i, j (numeração local) é:

$$\left\langle \sum_{l=1}^5 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + B U_{i,j} + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1} = \left(\sum_{l=1}^5 \alpha_l \right) f_{i,j}. \quad (7)$$

A_1, A_2, B, C_1 e C_2 são definidos de forma análoga ao caso 1D.

Caso 2D e estêncil com 5 pontos.

Os vetores geradores da base $G_1, \dots, G_5$ correspondem aos esquemas CC-2D, NE-1-2D, NE-6-2D, NE-7-2D e NE-8-2D da dissertação [3], onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} \text{ e}$$

$$\text{CC-2D: centrado clássico } k^2 u \approx k^2 U_{i,j} \Rightarrow G_1 = \frac{1}{h^2} [1, 1, -4 + (kh)^2, 1, 1].$$

$$\text{NE-1-2D: } k^2 u \approx \frac{k^2}{2} \left[\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{2} + \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{2} \right] \Rightarrow G_2 = \frac{1}{h^2} [A, A, -4, A, A],$$

$$A = 1 + \frac{(kh)^2}{4}.$$

$$\text{NE-6-2D: } k^2 u \approx k^2 \left[U_{i,j} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{4} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{4} \right] \Rightarrow G_3 = \frac{1}{h^2} [A, A, B, C, C],$$

$$A = 1 - \frac{(kh)^2}{4}, B = -4 + (kh)^2, C = 1 + \frac{(kh)^2}{4}.$$

$$\text{NE-7-2D: } k^2 u \approx k^2 \left[U_{i,j} + \frac{U_{i-1,j} - U_{i+1,j}}{4} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{4} \right] \Rightarrow G_4 = \frac{1}{h^2} [A, C, B, C, A],$$

$$A = 1 + \frac{(kh)^2}{4}, B = -4 + (kh)^2, C = 1 - \frac{(kh)^2}{4}.$$

$$\text{NE-8-2D: } k^2 u \approx k^2 \left[U_{i,j} + \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{2} - \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{2} \right] \Rightarrow G_5 = \frac{1}{h^2} [A, C, B, A, C],$$

$$A = 1 + \frac{(kh)^2}{2}, B = -4 + (kh)^2, C = 1 - \frac{(kh)^2}{2}.$$

Caso 2D e estêncil com 5 pontos.

Os α_l são determinados minimizando a relação de dispersão, onde $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, pois os vetores G_3 , G_4 e G_5 não são necessários para malhas uniformes por motivos de simetria ([ver Colorário em \[1\]](#)).

O α_2 que minimiza a dispersão na direção de onda $\theta_1 = \pi/8$ é

$$\alpha_2 = -\frac{2(-4 + k^2 h^2 + 2c_1 + 2s_1)}{-8 + 4c_1 + k^2 h^2 c_1 + 4s_1 + k^2 h^2 s_1}, \quad (8)$$

onde $c_1 = \cos(kh \cos \theta_1)$ e $s_1 = \cos(kh \sin \theta_1)$. Com estes coeficientes a equação do estêncil do **MCDFC-5p apresenta dispersão mínima, equivalente ao GLS**. Porém, o estêncil do método GLS possui 9 pontos e o estêncil do MCDFC-5p apenas 5 pontos.

$$k^h - k = \frac{1}{48} k^3 h^2 [\cos(2\theta) - \cos(2\theta_1)] [\cos(2\theta) - \cos(2\theta_2)] + \mathcal{O}(k^5 h^4), \quad (9)$$

equivalente à dispersão do GLS para $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$.

Caso 2D e estêncil com 5 pontos.

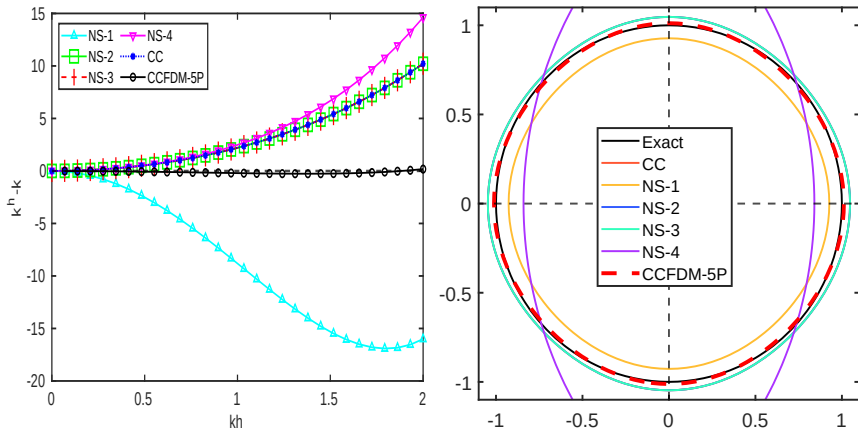


Figura 4: Dispersão $k^h - k$ para $k = 100$, $\theta_1 = \pi/8$, $\theta_2 = 3\pi/8$ em função de kh (esquerda) para $\theta = \pi/4$, e em função de θ (direita) para $kh = 1$.

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Caso 2D e estêncil com 9 pontos.

$L = \dim(S^L) = 9$, o MCDFC para o nó central i, j (numeração local) é:

$$\left\langle \sum_{l=1}^9 \alpha_l G_l, U^h \right\rangle := A_1 U_{i-1,j} + A_2 U_{i,j-1} + A_3 U_{i-1,j-1} + A_4 U_{i+1,j-1} + B U_{i,j} \\ + C_1 U_{i+1,j} + C_2 U_{i,j+1} + C_3 U_{i-1,j+1} + C_4 U_{i+1,j+1} = \left(\sum_{l=1}^9 \alpha_l \right) f_{i,j}. \quad (10)$$

Os coeficientes são definidos de forma análoga ao caso 1D e 2D.

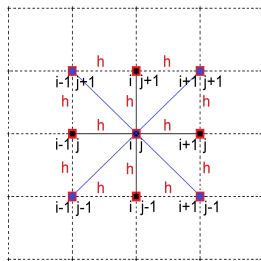


Figura 5: Estêncil de 9 pontos (vermelho) e dois estêncis de 5 pontos (preto e azul).

Caso 2D e estêncil com 9 pontos.

O operador Laplaciano pode ser aproximado de duas formas diferentes utilizando: fórmulas centradas de segunda ordem (MCDFC-9p-L5p) e fórmulas centradas de quarta ordem (MCDFC-9p-L9p).

Duas bases diferentes para o subespaço de aproximação local S^L podem ser construídas, gerando duas versões diferentes do MCDFC.

Estas duas versões são equivalentes, apresentando a mesma relação de dispersão mínima equivalente ao QSFEM.

Considerando malhas uniformes e apenas o caso mais simétrico das versões MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0$. Assim, apenas o α_2 e α_4 são necessários para zerar a dispersão em duas direções de onda: $\theta_1 = \pi/16$ e $\theta_2 = 3\pi/16$, e minimizar a dispersão nas direções restantes.

$$k^h - k = \frac{k^7 h^6 [\cos(4\theta) - \cos(4\theta_1)] [\cos(4\theta) - \cos(4\theta_2)]}{387072} + \mathcal{O}(k^9 h^8). \quad (11)$$

Caso 2D e estêncil com 9 pontos.

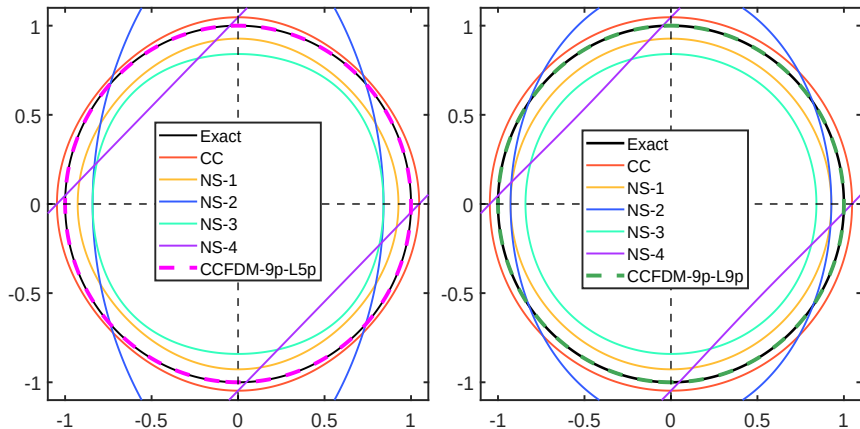


Figura 6: Dispersão $k^h - k$ para $k = 100$, $\theta_1 = \pi/16$, $\theta_2 = 3\pi/16$ em função de θ para $kh = 1$.

Dispersão caso 2D para estêncil de 5 e 9 pontos.

MCDFC-5p, MCDFC-9p-L5p, MCDFC-9p-L9p.

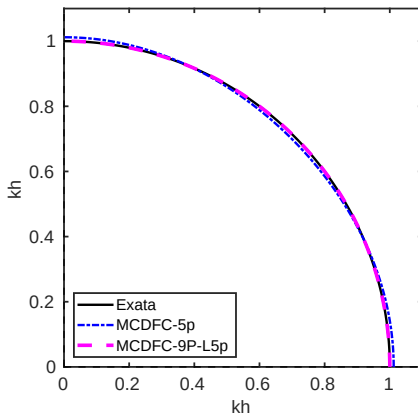


Figura 7: Dispersão de onda para o caso 2D $k = 100$, $kh = 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Dispersão caso 2D para estêncil de 5 e 9 pontos.

Table: Comparação da dispersão de cada método dependendo da direção da onda: $d := (k^h - k)h$ para $kh = 1$.

θ	CCFDM-5p	CCFDM-9p-L5p	CCFDM-9p-L9p	QSFEM
0	0.0104166666	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$
$\pi/16$	0.0073656956	0	0	0
$\pi/8$	0	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$
$3\pi/16$	-0.0073656956	0	0	0
$\pi/4$	-0.0104166666	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$
$5\pi/16$	-0.0073656956	0	0	0
$3\pi/8$	0	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$	$-0.1291749338 \times 10^{-5}$
$7\pi/16$	0.0073656956	0	0	0
$\pi/2$	0.0104166666	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$	$0.1291749338 \times 10^{-5}$

Consequência da malha uniforme na análise de dispersão e simetria do estêncil.

Caso 1D e estêncil com 3 pontos implica em $A = C$.

$$[\cos(k^h h)(A + C) + B] + i \sin(k^h h)[-A + C] = 0 + i0. \quad (12)$$

Caso 2D e estêncil com 5 pontos implica em $A_1 = C_1$ e $A_2 = C_2$.

$$\text{Parte Real: } [A_1 + C_1] \cos(k^h h \cos(\theta)) + [A_2 + C_2] \cos(k^h h \sin(\theta)) + B = 0, \quad (13)$$

$$\text{Parte Imaginária: } [C_1 - A_1] \sin(k^h h \cos(\theta)) + [C_2 - A_2] \sin(k^h h \sin(\theta)) = 0. \quad (14)$$

Corollary

Let it be a uniform mesh with parameter $h = h_x = h_y$. For each central node I (global ordering or enumeration) consider stencil with 3-points in the 1D case, stencil with 5-points and 9-points in the 2D case. Let G_I be the generating vectors of the CCFDM for these 1D and 2D cases. *If the equations of the imaginary part of the dispersion analysis are satisfied*, then there are only:

- i) two linearly independent generating vectors in the 1D case,
- ii) three linearly independent generating vectors in the 2D case and 5-point stencil,
- iii) five linearly independent generating vectors in the 2D case and 9-point stencil.

Consequência da malha uniforme na análise de dispersão e simetria do estêncil.

Proof.

Item i) In the 1D case and 3-point stencil, the CCFDM is determined by three linearly independent generating vectors $G_1 = [A_1, B_1, C_1]$, $G_2 = [A_2, B_2, C_2]$ and $G_3 = [A_3, B_3, C_3]$. For a uniform mesh, the equation of the imaginary part of the dispersion analysis implies $A = C$, therefore $G_1 = [A_1, B_1, A_1]$, $G_2 = [A_2, B_2, A_2]$ and $G_3 = [A_3, B_3, A_3]$. These vectors are linearly independent, when $\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \alpha_3 G_3 = 0$ only if $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. In matrix form this restriction is:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

From which it can be noted that this matrix only has two linearly independent rows. That is, the rank of the matrix is 2 (deficient rank). Items ii) and iii) can be demonstrated in a similar way. More details can be found in [1,3]. □

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata $u(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$, **onda plana** na direção θ .

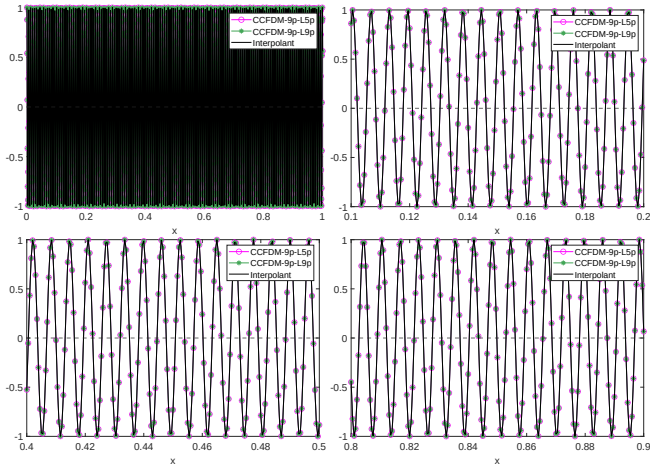


Figura 8: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $\theta = 0$, $k = 1000$, $kh = 0.5$.

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata $u(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$, onda plana na direção θ .

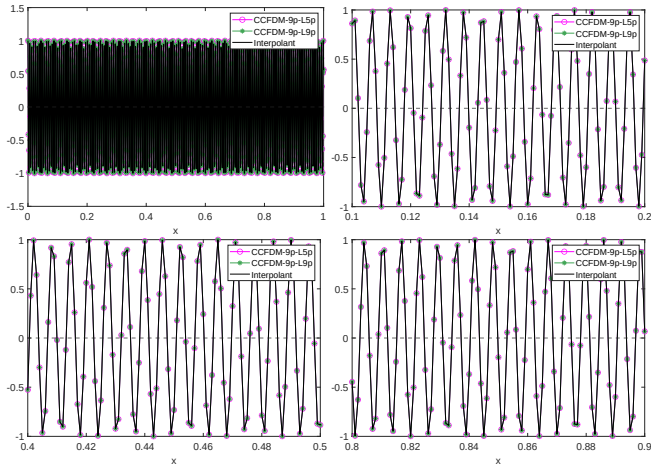


Figura 9: Soluções numéricas MCDFM-9p-L5p e MCDFM-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $\theta = 0$, $k = 1000$, $kh = 1.0$.

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata $u(x, y) = \cos[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$, **onda plana** na direção θ .

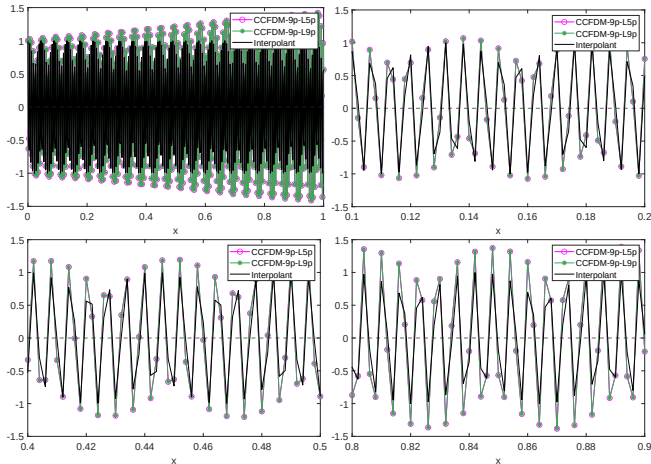


Figura 10: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $\theta = 0$, $k = 1000$, $kh = 2.0$.

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata com **superposição de três ondas planas** com $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/8$: $u(x, y) = \sum_{i=1}^3 \cos[k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)]$.

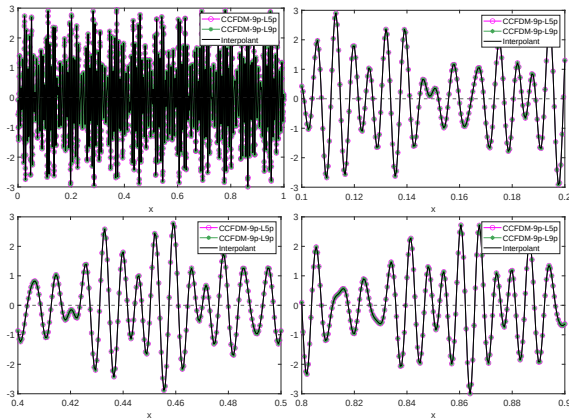


Figura 11: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $k = 1000$, $kh = 0.5$.

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata com **superposição de três ondas planas** com $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/8$: $u(x, y) = \sum_{i=1}^3 \cos[k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)]$.

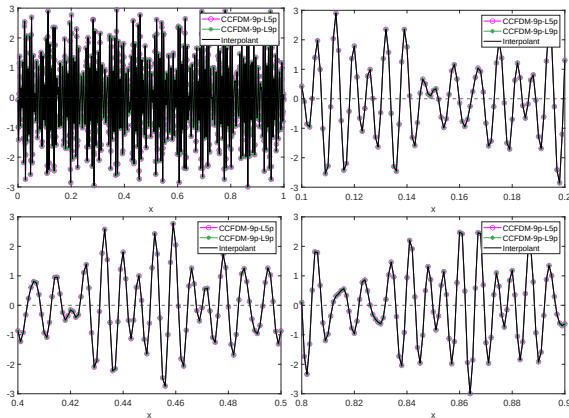


Figura 12: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $k = 1000$, $kh = 1.0$.

Problema homogêneo com condições de contorno de Dirichlet.

Solução exata com **superposição de três ondas planas** com $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/8$: $u(x, y) = \sum_{i=1}^3 \cos[k(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)]$.

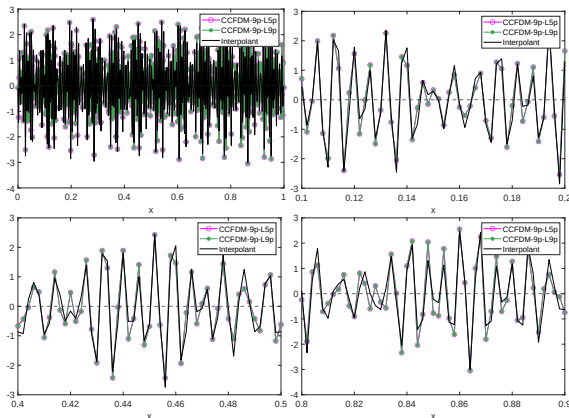


Figura 13: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema homogêneo com $k = 1000$, $kh = 2.0$.

Problema com fonte e condições de contorno de Dirichlet.

Fonte $f(x, y) = 4 + k^2(x^2 + y^2)$ e solução exata
 $u(x, y) = x^2 + y^2 + \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$.

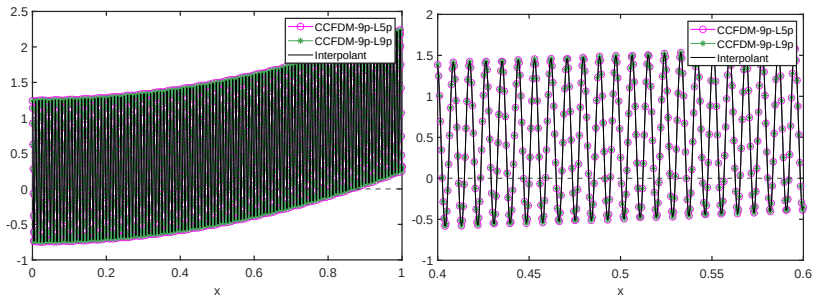


Figura 14: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema não homogêneo com $\theta = \pi/4$, $k = 1000$, $kh = 0.5$.

Problema com fonte e condições de contorno de Dirichlet.

Fonte $f(x, y) = 4 + k^2(x^2 + y^2)$ e solução exata
 $u(x, y) = x^2 + y^2 + \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$.

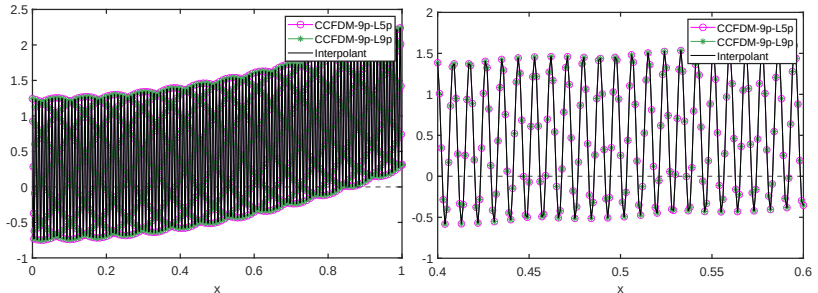


Figura 15: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema não homogêneo com $\theta = \pi/4$, $k = 1000$, $kh = 1.0$.

Problema com fonte e condições de contorno de Dirichlet.

Fonte $f(x, y) = 4 + k^2(x^2 + y^2)$ e solução exata
 $u(x, y) = x^2 + y^2 + \sin[k(x \cos \theta + y \sin \theta)]$.

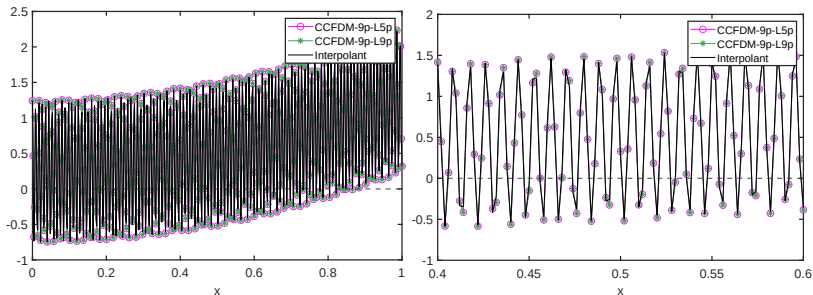


Figura 16: Soluções numéricas MCDFC-9p-L5p e MCDFC-9p-L9p na seção $y = 0.5$ para o problema não homogêneo com $\theta = \pi/4$, $k = 1000$, $kh = 2.0$.

Tópicos

1 Introdução

- Problema e desafios

2 Método Completo de Diferenças Finitas Centradas

- MCDFC 1D e estêncil com 3 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 5 pontos
- MCDFC 2D e estêncil com 9 pontos

3 Resultados Numéricos

- Casos 2D
- Erros 2D

Convergência do erro global.

Erro relativo $RE^G = \frac{\|U-u\|_2}{\|u\|_2}$ calculado na norma vetorial l_2 como uma função do parâmetro de malha (eixo inferior) ou kh (eixo superior).

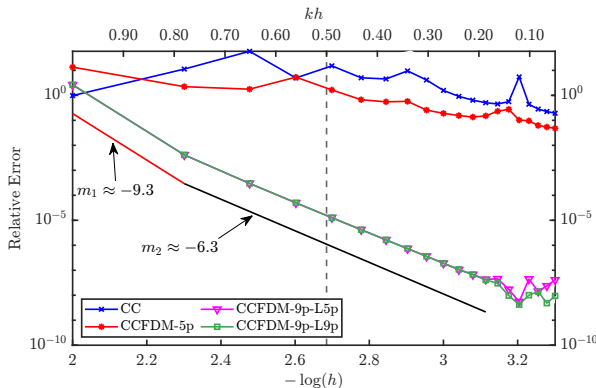


Figura 17: Erro relativo na norma l_2 com $f = 0$, $k = 300$, $\theta = 0$ e

$100 \times 100 \leq N \leq 2000 \times 2000$.

Erro relativo RE^G em função do número de onda k .

Erro relativo $RE^G = \frac{\|U-u\|_2}{\|u\|_2}$ calculado na norma vetorial l_2 como uma função de k mantendo o valor $kh = 0,5$ constante para $f = 0$, $\theta = 0$ e $50 \leq k \leq 1000$.

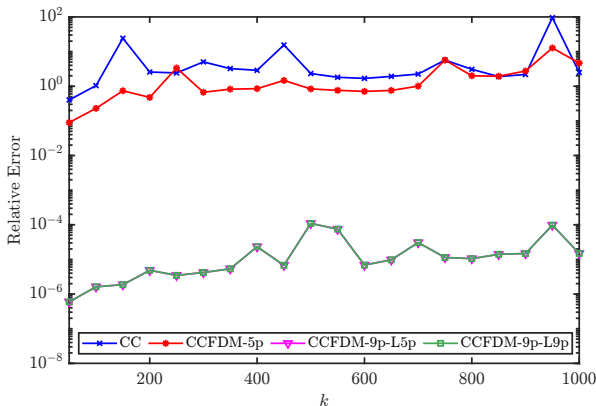


Figura 18: Erro relativo na norma l_2 com $f = 0$, $\theta = 0$ e $50 \leq k \leq 1000$.

Erro relativo RE^G em função da direção da onda plana θ .

Erro relativo $RE^G = \frac{\|U-u\|_2}{\|u\|_2}$ calculado na norma vetorial l_2 como uma função de θ mantendo o valor $kh = 0,5$ constante para $f = 0$ e $k = 200$.

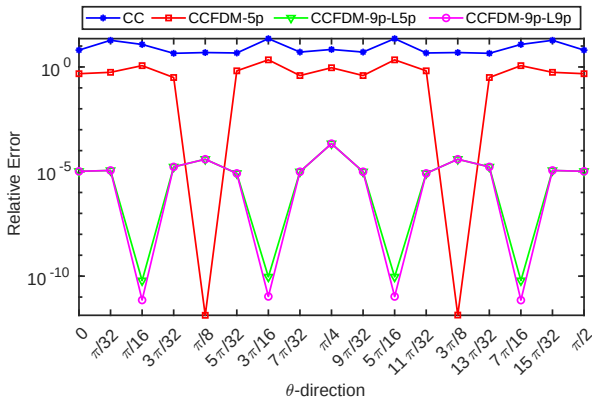


Figura 19: Erro relativo na norma l_2 com $f = 0$, $kh = 0,5$ e $k = 200$.

Comentários Finais.

- Uma nova abordagem para o MDF aplicável para qualquer EDP foi desenvolvida, a qual é capaz de gerar qualquer esquema de diferenças finitas pertencente ao subespaço de aproximação local S^L .
- Esta abordagem sempre é capaz de gerar o esquema de diferenças finitas que minimiza a relação de dispersão em qualquer dimensão.
- No caso 1D e estêncil com 3 pontos, o MCDFC elimina totalmente a poluição do erro, anulando a dispersão de onda.
- No caso 2D e estêncil com 5 pontos, o MCDFC-5p é capaz de obter dispersão equivalente à do método GLS, porém com o estêncil de dimensão menor. A matriz do sistema linear é penta-diagonal enquanto que a do método GLS tem nove diagonais diferentes de zero.
- No caso 2D e estêncil com 9 pontos, as duas versões do MCDFC-9p produzem a mesma relação de dispersão equivalente à do método QSFEM.

Livros, Tese, Dissertações e Artigos para Leitura I



[1] Gustavo Benitez Alvarez, Helder da Fonseca Nunes, Welton Alves de Menezes.

Complete centered finite difference method for Helmholtz equation.

Anais da Academia Brasileira de Ciências, aceito, 2024.



[2] Gustavo Benitez Alvarez & Helder da Fonseca Nunes.

Novos Esquemas de Diferenças Finitas para a Equação de Helmholtz.

REMAT: REVISTA ELETRÔNICA DA MATEMÁTICA, p. e4001-18, 2024. <https://doi.org/10.35819/remat2024v10iespecialid7019>

Livros, Tese, Dissertações e Artigos para Leitura II



[3] Helder da Fonseca Nunes.

Método Completo de Diferenças Finitas Centradas para a Equação de Helmholtz.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal Fluminense, 2024.



[4] Gustavo Benitez Alvarez & Helder da Fonseca Nunes.

NOVOS ESQUEMAS DE DIFERENÇAS FINITAS PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ.

Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC-RJ) & Simpósio Primeira Década PPG-MCCT, 2023.

Livros, Tese, Dissertações e Artigos para Leitura III



[5] Vichnevetsky R., Bowles J.B.,
Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations.

SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics,
1982.



[6] Ihlenburg F..
Finite element analysis of acoustic scattering.
Springer-Verlag, 1998.

Livros, Tese, Dissertações e Artigos para Leitura IV



[7] Leveque R.J..

Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time Dependent Problems.

SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.



[8] Harari I., Hughes T.J.R..

Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains.

Comput Methods Appl Mech Engrg, 98(3): 411-454, 1992.

Livros, Tese, Dissertações e Artigos para Leitura V



- [9] Babuska I., Ihlenburg F., Paik E.T., Sauter S.A..
A Generalized Finite Element Method for solving the
Helmholtz equation in two dimensions with minimal
pollution.
Comput Methods Appl Mech Engrg, 128: 325-359, 1995.