

NOTAS DE AULA DE CÁLCULO I: Engenharias da EEIMVR

Prof. Gustavo Benitez Alvarez

Profa. Patrícia Alves Pereira de Sousa

EEIMVR - Universidade Federal Fluminense

Tópico 5- Cálculo Diferencial.

5.1 - Definição de derivadas. Derivadas laterais. Diferencial de uma função. Diferenciabilidade de funções. Cálculo de derivadas usando a definição. Obtenção de uma tabela básica de derivadas. Propriedades de derivadas. Regra da cadeia. Derivada da função implícita, inversa, paramétrica. Derivada logarítmica.

5.2 - Derivadas e diferenciais de ordem superior. Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

5.3 - Máximos e mínimos locais e globais. Esboço de gráficos. Regra de L'Hospital - Bernoulli. Séries de Taylor e McLaurin.

5.1 - Definição de derivadas. Derivadas laterais. Diferencial de uma função. Diferenciabilidade de funções. Cálculo de derivadas usando a definição. Obtenção de uma tabela básica de derivadas. Propriedades de derivadas. Regra da cadeia. Derivada da função implícita, inversa, paramétrica. Derivada logarítmica.

Derivada de uma função num ponto.

Seja $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b) e x_o um ponto deste intervalo. Denotemos por $\Delta x = x - x_o$ um incremento do argumento da função tal que o ponto $x_o + \Delta x \in (a, b)$. Então o incremento correspondente da função será: $\Delta y = y(x) - y_o = f(x) - f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$. E se $\Delta x \neq 0$ podemos definir o quociente dos incrementos como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$.

Geometricamente isto pode ser entendido como segue:

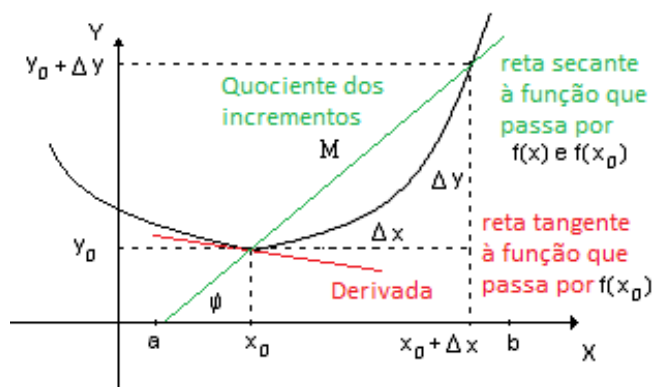


Figure 1: Representação geométrica do quociente dos incrementos e da derivada.

Como $tg(\varphi) = \frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)}$, $sen(\varphi) = \frac{\Delta y}{M}$ e $cos(\varphi) = \frac{\Delta x}{M}$, temos que $tg(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ou seja, o quociente dos incrementos corresponde à tangente do ângulo que forma a secante com o

eixo X . Note que este ângulo φ é função de Δx ($\varphi(\Delta x)$). O quociente dos incrementos é chamado de velocidade média de variação da função $f(x)$ no segmento $(x_o, x_o + \Delta x)$.

Definição 1 Dizemos que $f(x)$ é derivável no ponto x_o se existe o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ do quociente dos incrementos. O valor deste limite é chamado de derivada de $f(x)$ no ponto x_o e costuma-se denotar como:

$$y'(x_o) = f'(x_o) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_o} = \frac{df}{dx}|_{x=x_o} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg(\varphi(\Delta x)).$$

Neste caso a secante quando $\Delta x \rightarrow 0$ é chamada de tangente à curva da função no ponto $(x_o, f(x_o))$. O $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg(\varphi(\Delta x)) = tg(\varphi_o)$ e por isto podemos interpretar geometricamente a derivada da função no ponto x_o como a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(x_o, f(x_o))$: $\frac{df}{dx}|_{x=x_o} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg(\varphi(\Delta x)) = tg(\varphi_o)$.

Se a função $f(x)$ admite derivada em cada ponto de certo intervalo $(c, d) \subset Dom f$, então $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ constitui uma nova função definida no intervalo (c, d) .

Exemplo 1: $f(x) = c$, onde c representa uma constante. Então $f(x_o + \Delta x) = c \forall x_o \in \mathbb{R}$. Portanto, $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 0 \forall x_o \in \mathbb{R}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ e $y' = 0$.

Exemplo 2: $f(x) = x$. Neste caso $f(x_o + \Delta x) = x_o + \Delta x$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \frac{(x_o + \Delta x) - x_o}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Portanto $y' = 1 \forall x_o \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: $f(x) = x^2$. Neste caso $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \frac{(x_o + \Delta x)^2 - x_o^2}{\Delta x} = \frac{(x_o + \Delta x + x_o)(x_o + \Delta x - x_o)}{\Delta x} = \frac{(2x_o + \Delta x)(\Delta x)}{\Delta x} = (2x_o + \Delta x)$. Portanto $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_o \forall x_o \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4: $f(x) = |x|$. Neste caso $f(x_o + \Delta x) = |x_o + \Delta x|$ e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x_o + \Delta x| - |x_o|}{\Delta x}$. Se $x_o > 0$ ($x_o < 0$) podemos escolher $|\Delta x|$ o suficientemente pequeno para que $(x_o + \Delta x) > 0$ ($(x_o + \Delta x) < 0$), logo temos:

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{para } x_o > 0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad \text{para } x_o < 0 \end{array} \right.$ e portanto $\left\{ \begin{array}{l} y' = 1 \quad \text{para } x_o > 0 \\ y' = -1 \quad \text{para } x_o < 0 \end{array} \right.$. No ponto $x_o = 0$ temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{para } x_o > 0 \\ -1 & \text{para } x_o < 0 \end{cases}$, logo o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ não existe, e portanto a derivada no ponto $x_o = 0$ também não existe. Note que os limites laterais existem mas são diferentes.

Derivadas laterais e infinitas.

Analogamente aos conceitos de limites e continuidade lateral, introduzimos o conceito de derivada lateral.

Definição 2 Chamamos de derivada lateral direita (esquerda) da função $y = f(x)$ no ponto x_o ao limite lateral direito (esquerdo) do quociente incremental quando $\Delta x \rightarrow 0$ se existe o limite.

$$f'_+(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \quad (\text{derivada pela direita}).$$

$$f'_-(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \quad (\text{derivada pela esquerda}).$$

Note que, para que exista $f'(x_o)$ é necessário e suficiente que existam e sejam iguais as derivadas laterais em x_o . Isto é: $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$.

Definição 3 Se em determinado ponto x_o temos que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \infty$ dizemos que a função possui derivada infinita em x_o . Neste caso, a reta tangente ao gráfico da função será perpendicular ao eixo X .

Exemplo: Determine $f'_+(x_o = 0)$ para $y = \sqrt[3]{x}$.

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x} \text{ e } f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Regras de derivação.

Já sabemos que se c é uma constante $y' = (c)' = 0$. Também, se $y = x$, então $y' = (x)' = 1$. Se $y = x^2$, então $y' = (x^2)' = 2x$.

Teorema 1 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no ponto x_o , então as funções $[f(x) \pm g(x)]$, $[f(x)g(x)]$ e $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ (com $g(x) \neq 0$) são deriváveis em x_o e se verifica:

- 1) $[f(x) \pm g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o)$,
- 2) $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$,
- 3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=x_o} = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$, se $g(x_o) \neq 0$.

Prova:

1) $y = f(x) \pm g(x)$, então $\Delta y = (f(x_o + \Delta x) \pm g(x_o + \Delta x)) - (f(x_o) \pm g(x_o)) = (f(x_o + \Delta x) - f(x_o)) \pm (g(x_o + \Delta x) - g(x_o))$, portanto

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x_o + \Delta x) - f(x_o))}{\Delta x} \pm \frac{(g(x_o + \Delta x) - g(x_o))}{\Delta x} \right)$ como por hipótese $f(x)$ e $g(x)$ possuem derivada no ponto x_o , então existem os limites de cada sumando e podemos usar a propriedade do limite da soma:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_o + \Delta x) - f(x_o))}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g(x_o + \Delta x) - g(x_o))}{\Delta x}, \text{ ou seja, } (f(x) \pm g(x))'_{x=x_o} = f'(x_o) \pm g'(x_o).$$

O restante das provas fica de exercício.

Note que como caso particular de 2) e 3) temos que $[cf(x)]' = cf'(x) + c'f(x) = cf'(x)$ e $\left[\frac{c}{g(x)}\right]' = \frac{c'g(x) - cg'(x_o)}{(g(x_o))^2} = -\frac{cg'(x_o)}{(g(x_o))^2}$ se $g(x) \neq 0$.

Derivadas de algumas funções (Tabela de derivadas).

a) $y = x^n$, onde n é um número inteiro. Utilizando a fórmula da derivada do produto e o princípio da indução podemos demonstrar que $y' = nx^{n-1}$. Isto também vale para n sendo um número racional.

b) $y = \sin(x)$, $y' = \cos(x)$.

c) $y = \cos(x)$, $y' = -\sin(x)$.

d) $y = \tan(x)$, $y' = \frac{1}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

e) $y = \cot(x)$, $y' = -\frac{1}{(\sin(x))^2} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

f) $y = \log_a(x)$, $y' = \frac{1}{x} \log_a e$, no caso que $a = e$ temos $y' = \frac{1}{x}$.

g) $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, no caso que $a = e$ temos $y' = e^x$.

h) derivada das funções hiperbólicas $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico) e $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico):

$$\begin{aligned}
y' &= (sh(x))' = ch(x). \\
y' &= (ch(x))' = sh(x). \\
y' &= (th(x))' = \frac{1}{(ch(x))^2}. \\
y' &= (cth(x))' = \frac{1}{(sh(x))^2}, \text{ se } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Derivada da função composta:

Se $y = f(u)$ e $u = \psi(x)$ possuem derivadas em $u_0 = \psi(x_0)$ e x_0 respectivamente, então a função composta $y = f(\psi(x))$ também possui derivada em x_0 e temos $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$. Esta regra pode ser aplicada a cadeias de qualquer número finito de funções deriváveis e também é conhecida como Regra da Cadeia.

Exemplo: Determine a derivada de $y = (x^2 - 2x + 3)^5$. Fazendo $u = x^2 - 2x + 3$ temos $y = u^5$ e pela fórmula temos $\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^5)}{du} \frac{d(x^2 - 2x + 3)}{dx} = 5u^4(2x - 2) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4$.

Derivada logarítmica:

Chamamos derivada logarítmica da função $y = f(x)$ à derivada do logaritmo de dita função: $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Isto pode facilitar o cálculo da derivada em casos do tipo $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$.

Exemplo: $y = u^v$, onde $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$.

Pegando o logaritmo da função temos $\ln y = \ln u^v = v \ln u$ e derivando o produto de duas funções obtemos $(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)'$, $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$ e $y' = y(v' \ln u + v \frac{u'}{u})$ ou $y' = u^v(v' \ln u + v \frac{u'}{u})$.

Derivadas de funções que não são explicitamente dadas.

1) Derivada da função inversa.

Se a derivada da função $y = f(x)$ é $\frac{dy}{dx} \neq 0$ em x_0 , então a derivada da função inversa $x = f^{-1}(y)$ será $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Exemplo: $y = \arcsen(x)$. A função inversa é $x = \sen(y)$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e $-1 \leq x \leq 1$. Note que mesmo que a função $x = f^{-1}(y)$ existe para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, a derivada se anula nos pontos $y = \pm \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\frac{dy}{dx} = \cos(x) = 0$ em $y = \pm \frac{\pi}{2}$. Portanto, nestes pontos não podemos aplicar a fórmula da derivada da função inversa. Nos pontos restantes segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(\frac{dx}{dy})}, \text{ como } \frac{dx}{dy} = \cos(y) \text{ logo } \frac{dy}{dx} = (\arcsen(x))' = \frac{1}{\cos(y)} \text{ e } \cos(y) = \sqrt{1 - \sen^2(y)}. \\
\text{Portanto, } (\arcsen(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Exemplo: $y = x + \ln x$. Determine $\frac{dx}{dy}$.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \text{ portanto } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{x+1}.$$

2) Derivadas das funções dadas em forma paramétricas.

Dizemos que a relação entre y e x é dada parametricamente se tanto x quanto y são funções de uma terceira variável t chamada de parâmetro $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. Então se verifica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}.$$

Exemplo: $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = a \sin(t) \end{cases}$, $\frac{dy}{dt} = a \cos(t)$ e $\frac{dx}{dt} = -a \sin(t)$, logo $\frac{dy}{dx} = -\frac{a \cos(t)}{a \sin(t)} = -\cot g(t)$.

3) Derivada da função implícita.

Quando a dependência entre y e x esta dada de forma implícita $F(x, y) = 0$, para determinar $\frac{dy}{dx}$ nos casos mais simples é suficiente:

- achar a derivada com respeito a x de $F(x, y)$ considerando y função de x ,
- igualar esta derivada a zero $\frac{dF(x, y)}{dx} = 0$,
- resolver a equação obtida com respeito a y' .

Exemplo: Achar $\frac{dy}{dx}$ se $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Seguindo a) e b) obtemos $3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + y') = 0$. Proseguindo com c) temos $y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$.

5.2 - Derivadas e diferenciais de ordem superior. Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

Derivadas de ordem superior.

Definição 4 Se chama derivada de segunda ordem ou derivada segunda de uma função $y = f(x)$ num ponto x_o à derivada da função derivada neste ponto, sempre que a primeira derivada da função $y = f(x)$ exista no ponto x_o . A derivada segunda é denotada por: y'' , $f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Seguindo este procedimento podemos obter a derivada de terceiro ordem, quarta e assim sucessivamente. Assumindo que estas definidas (existem) todas as derivadas até um certo ordem $(n - 1)$ numa vizinhança do ponto x_o , então podemos definir a derivada de ordem n da função $y = f(x)$ no ponto x_o como sendo a derivada da derivada de ordem $(n - 1)$ e é denotada por: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Exemplo: Determine y'' para $y = \ln(1 - x)$.

$$y' = -\frac{1}{(1-x)}, \quad y'' = \left(-\frac{1}{(1-x)}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Teorema 2 Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que possuam derivadas até ordem n no ponto x_o , então as funções $[f(x) \pm g(x)]$ e $[f(x)g(x)]$ possuem derivadas até ordem n no ponto x_o e se verifica:

$$1) [f(x) \pm g(x)]_{x=x_o}^{(n)} = f^{(n)}(x_o) \pm g^{(n)}(x_o).$$

2) Formula de Leibniz:

$$[f(x)g(x)]_{x=x_o}^{(n)} = f^{(n)}(x_o)g(x_o) + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x_o)g'(x_o) + \binom{n}{2}f^{(n-2)}(x_o)g''(x_o) + \dots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_o)g^{(k)}(x_o) + \dots + f(x_o)g^{(n)}(x_o), \text{ onde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n \text{ (fatorial de } n) \text{ e } 0! = 1 \text{ por definição.}$$

Note que quando $n = 1$ na formula de Leibniz recaímos numa expressão já conhecida para a derivada do produto de duas funções. Isto é, $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) +$

$\binom{1}{1} f^{(0)}(x_o) g'(x_o)$, onde $f^{(0)}(x_o)$ significa que é a derivada de ordem zero, que coincide com a própria função $f(x)$. Como $\binom{1}{1} = 1$ temos $[f(x)g(x)]'_{x=x_o} = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$, que foi a expressão obtida anteriormente para a derivada do produto.

Derivadas de ordem superior de funções dadas em forma paramétrica.

Se y é uma função de x em forma paramétrica $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, suas derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... podem ser calculadas sucessivamente através das formulas:

$$\text{derivada primeira } \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)},$$

$$\text{derivada segunda } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}, \text{ e assim sucessivamente.}$$

Exemplo: Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin(t), \quad \frac{dy}{dt} = b \cos(t), \text{ portanto } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos(t)}{-a \sin(t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg}(t).$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = -\frac{b}{a} (\operatorname{ctg}(t))' = -\frac{b}{a} \left(-\frac{1}{(\sin(t))^2}\right) = \frac{b}{a} \frac{1}{(\sin(t))^2}, \text{ portanto } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{b}{a} \frac{1}{(\sin(t))^2}}{-a \sin(t)} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{(\sin(t))^3}.$$

Diferenciais de primer ordem e ordens superiores.

Definição 5 Dizemos que $y = f(x)$ é diferenciável no ponto x_o se o incremento Δy pode ser escrito na forma $\Delta y = D\Delta x + M(\Delta x)\Delta x$, onde D não depende do incremento Δx e $M(\Delta x)$ é um infinitesimo quando $\Delta x \rightarrow 0$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(\Delta x) = 0$).

A parte linear com respeito ao incremento Δx é chamada de diferencial de primeiro ordem da função y e denotada por dy ou df :

$\Delta y = \underbrace{D\Delta x}_{dy} + M(\Delta x)\Delta x$ e quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos $dy = Ddx$ onde dx é o diferencial da variável independente x .

Exemplo: $y = x$. Neste caso $\Delta y = \Delta x$ portanto $D = 1$ e $M(\Delta x) = 0$, consequentemente $dy = dx$.

Teorema 3 Uma função $y = f(x)$ é diferenciável num ponto x_o se e somente se é derivável neste ponto e se verifica: $dy = y'dx$.

Isto é, a diferencial de uma função é igual ao produto de sua derivada pelo diferencial da variável independente.

Exemplo: Determine a diferencial de $y = 3x^2 - x$.

Primeira via:

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x \quad (x \text{ corresponde ao } x_o \text{ arbitrário}) = \underbrace{(6x - 1)\Delta x + 3\Delta x\Delta x}_M \text{ portanto } dy = (6x - 1)dx.$$

Segunda via:

$$y' = 6x - 1 \text{ como } dy = y'dx \text{ segue } dy = (6x - 1)dx.$$

Propriedade fundamentais das diferenciais.

- a) $dc = 0$, onde c é uma constante
- b) $dx = \Delta x$, onde x é a variável independente (incremento infinitesimal)
- c) $d(cu) = cdu$
- d) $d(u \pm v) = du \pm dv$
- e) $d(uv) = u dv + v du$
- f) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ se $(v \neq 0)$
- g) $d(f(u)) = f'(u)du = \frac{df}{du}du = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}dx = \frac{df}{dx}dx$.

Aplicação do diferencial nos calculos aproximados.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = D\Delta x + M(\Delta x)\Delta x \quad \text{como } dy = Ddx = f'(x)dx \\ = f'(x)\Delta x + M(\Delta x)\Delta x.$$

Quando $|\Delta x|$ é pequeno nós podemos desprezar o termo $M(\Delta x)\Delta x$, já que é um infinitesimo de ordem maior que o termo $f'\Delta x$. Neste caso obtemos uma expressão aproximada para o incremento da função:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \text{ ou seja } \Delta y \approx dy \text{ e portanto } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Diferenciais de ordem superior.

Definição 6 Seja $y = f(x)$ diferenciável em todo ponto do intervalo (a, b) . Seu diferencial é denotado $dy = f'(x)dx$. Chamamos diferencial de segunda ordem ao diferencial do diferencial de primeiro ordem. Isto é: $d(dy) = d^2y = d(f'(x)dx) = f'(x)d(dx) + dx d(f'(x)) = dx f''(x)dx$.

$d^2y = f''(x)(dx)^2$. Note que dx é considerado constante (esta fixo), logo $d(dx) = d^2x = 0$ sempre. Por este motivo na notação da derivada segunda é usado $\frac{d^2y}{dx^2}$ e não $\frac{d^2y}{d^2x}$.

De forma semelhante é definido o diferencial de terceira ordem e assim sucessivamente se obtendo:

$$\begin{aligned} d^3y &= y'''(dx)^3, \\ \vdots & \\ d^n y &= y^{(n)}(dx)^n. \end{aligned}$$

No caso que se tem $y = f(u)$, onde $u = \varphi(x)$ temos:

$$dy = f'(u)du, \text{ onde } f'(u) = \frac{df}{du} = \frac{df(u(\varphi(x)))}{du} \text{ a derivada da função composta } \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} \Rightarrow dy = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} dx = \frac{df}{du} du \text{ já que } du = \frac{du}{dx} dx. \text{ Isto é, } dy = \frac{df}{du} du, \text{ onde } du = \frac{du}{dx} dx.$$

$$\text{Agora } d^2y = d(dy) = d\left(\frac{df}{du} du\right) \text{ aplicando a propriedade para o produto temos} \\ = d\left(\frac{df}{du}\right)du + \frac{df}{du}d(du) = d\left(\frac{df}{du}\right)du + \frac{df}{du}d^2u, \text{ fazendo } g = \frac{df}{du} \text{ temos que} \\ d\left(\frac{df}{du}\right) = dg = \frac{dg}{du}du = \frac{d\left(\frac{df}{du}\right)}{du}du = \frac{d^2f}{du^2}du, \text{ portanto segue que:}$$

$$d^2y = \frac{d^2f}{du^2}(du)^2 + \frac{df}{du}d^2u.$$

Este mesmo procedimento pode ser feito para obter diferenciais de ordem superior.

Principais teoremas do cálculo diferencial e suas aplicações.

Definição 7 (Extremos Absolutos) Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de (a, b) . Dizemos que f possui um máximo absoluto (mínimo absoluto) no ponto x_0 se $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in (a, b)$ ($f(x) \geq f(x_0) \forall x \in (a, b)$).

Definição 8 (Extremos Relativos) Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de (a, b) . Dizemos que f possui um máximo relativo (mínimo relativo) no ponto x_0 se, existe uma vizinhança do ponto x_0 $V(x_0, \delta)$, tal que $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in V(x_0, \delta)$ ($f(x) \geq f(x_0) \forall x \in V(x_0, \delta)$).

Teorema 4 (Fermat) Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b) tal que no ponto $x_0 \in (a, b)$ alcança seu valor máximo ou mínimo neste intervalo. Se a derivada $f'(x_0)$ existe, então $f'(x_0) = 0$.

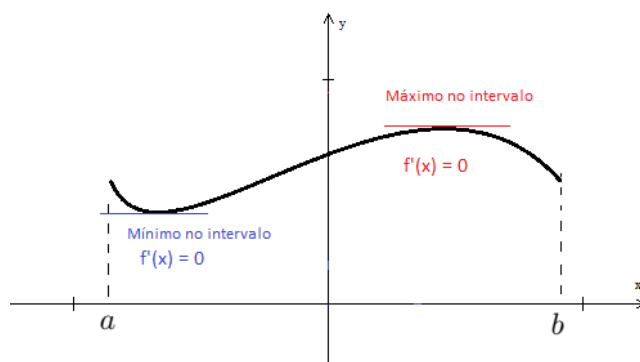


Figure 2: Representação geométrica do teorema de Fermat.

Geometricamente o teorema de Fermat diz que nos pontos de extremos de uma função, quando são pontos interiores de um intervalo, se existe a derivada (reta tangente ao gráfico da função) nestes pontos, então ela é horizontal. Agora veremos um exemplo, onde o teorema não é válido.

Exemplo: $y = 1 - |x|$ em $(-1, 1)$ alcança seu valor máximo no ponto $x = 0$, mas neste ponto não existe a derivada, portanto não existe a tangente e o teorema não pode ser aplicado.

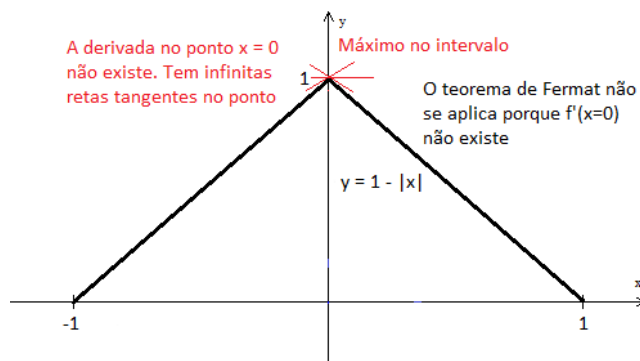


Figure 3: Representação geométrica do exemplo.

Teorema 5 (Rolle) Se uma função é contínua no intervalo $[a, b]$, possui derivada $f'(x) \forall x \in]a, b[$, e $f(a) = f(b)$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $f'(x_0) = 0$.

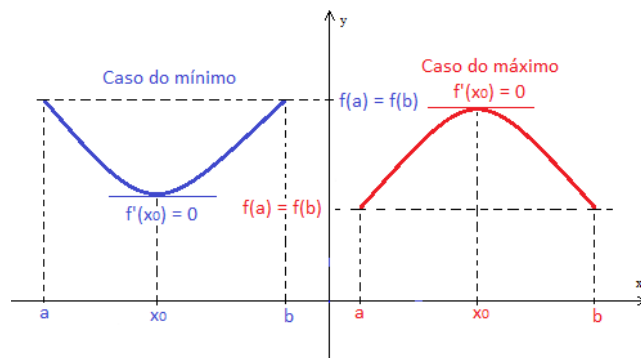


Figure 4: Representação geométrica do teorema de Rolle.

Teorema 6 (Lagrange) Se uma função é contínua no intervalo $[a, b]$, e possui derivada $f'(x) \forall x \in]a, b[$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$.

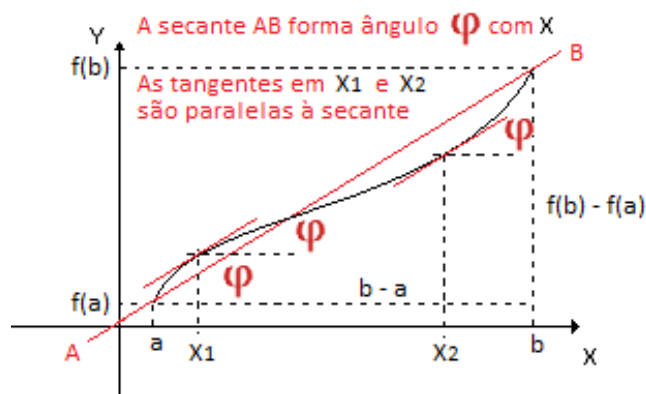


Figure 5: Representação geométrica do teorema de Lagrange.

Teorema 7 (Cauchy) Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$, possuem derivadas $f'(x)$ e $g'(x) \forall x \in]a, b[$ que não se anulam simultaneamente, e $g(b) \neq g(a)$, então existe, pelo menos, um x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5.3 - Máximos e mínimos locais e globais. Esboço de gráficos. Regra de L'Hospital - Bernoulli. Séries de Taylor e McLaurin.

Crescimento e decrescimento de funções de uma variável real.

Definição 9 Se diz que a função $f(x)$ é crescente (decrescente) no intervalo $]a, b[$ se para quaisquer pontos x_1 e x_2 deste intervalo tais que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Teorema 8 Seja $f(x)$ continua no intervalo $[a, b]$. Se $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in]a, b[$, então $f(x)$ é crescente (decrescente) no intervalo $[a, b]$.

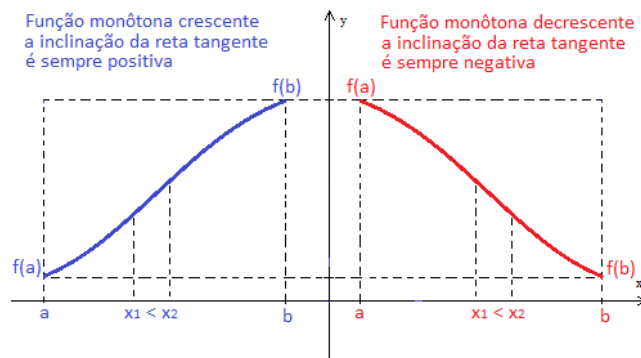


Figure 6: Representação geométrica de funções monôtonas crescente e decrescente.

Os pontos x_0 onde $f(x_0)$ não é crescente nem decrescente são chamados de pontos críticos ou estacionários. Nestes pontos $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe. Os pontos críticos delimitam os intervalos de monotonia de crescimento ou decrescimento de $f(x)$.

Exemplo: A função $y = x^2 - 2x + 2$ tem um único ponto crítico:
 $y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2 = 2(x - 1) = 0$ se $x = 1$.

Já que o domínio de definição desta função são todos os números reais, este domínio é dividido em apenas dois intervalos pelo único ponto crítico. No intervalo $(-\infty, 1)$ a função é monôtona decrescente porque a derivada em todos estes pontos é negativa. No intervalo $(1, \infty)$ a função é monôtona crescente porque a derivada em todos estes pontos é positiva. Veja o gráfico da função na figura 7.

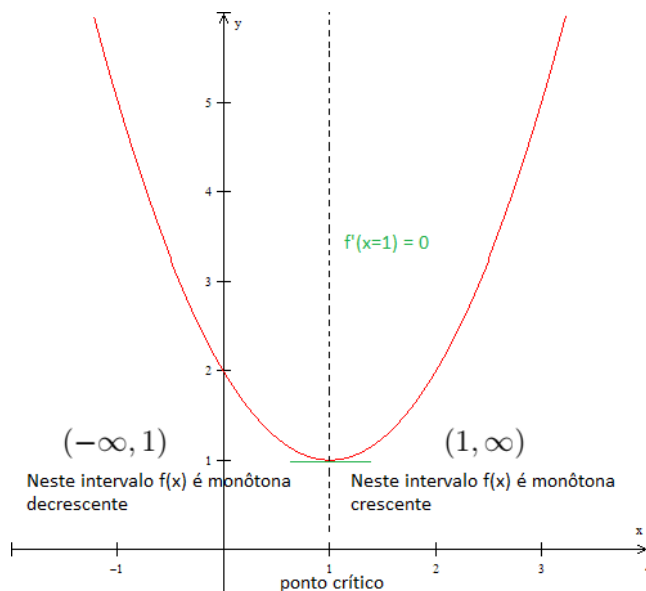


Figure 7: Intervalos de crescimento e decrescimento de $y = x^2 - 2x + 2$.

Máximos e mínimos locais (relativos) e globais (absolutos).

Os pontos de máximo ou mínimos relativos ou locais também são chamados de extremos relativos da função. O número $f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) relativo

da função no intervalo $V(x_0, \delta)$.

Condição Necessária para a existência de **Extremos Relativos**.

Teorema 9 Se em x_0 existe um extremo relativo, então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.

Condição Suficiente para a existência de **Extremos Relativos**.

Teorema 10 (Sinal da primeira derivada) Em x_0 há um máximo (mínimo) relativo de $f(x)$ se existe uma vizinhança $V(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) para $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Note que em x_0 não existirá extremo relativo de $f(x)$ se $f'(x)$ conserva o mesmo sinal $\forall x \in V(x_0, \delta)$.

Teorema 11 (Sinal da segunda derivada) Em x_0 há um máximo (mínimo) relativo de $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Em x_0 não existirá extremo relativo de $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$. Em geral, quando a primeira derivada que não se anula é de ordem k ímpar não existirá extremo relativo de $f(x)$ em x_0 . Se k é par existirá um máximo (mínimo) relativo se $f^{(k)}(x_0) < 0$ ($f^{(k)}(x_0) > 0$).

Exemplo: Encontre os extremos relativos de $y = x^3 - 3x^2 + 4$ no intervalo $(-2, 4)$?

Condição Necessária: $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.

Como esta função possui derivada em todo seu domínio, apenas resta a condição $f'(x_0) = 0$. Sabendo que $f' = 3x^2 - 6x$ segue que $3x(x - 2) = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Estes são os pontos críticos. Para saber se há extremos relativos devemos verificar a condição suficiente, e neste exemplo vamos usar Teorema 11.

Condição Suficiente: máximo relativo se $f''(x_0) < 0$ e mínimo relativo se $f''(x_0) > 0$. Já que $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

Em $x_1 = 0$ temos $f''(x_1 = 0) = -6 < 0$, logo haverá um máximo relativo.

Em $x_2 = 2$ temos $f''(x_2 = 2) = 6 > 0$, logo haverá um mínimo relativo.

Os pontos de máximo ou mínimos absolutos ou globais também são chamados de extremos absolutos da função. O número $f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) absoluto da função.

Teorema 12 Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$. O máximo (mínimo) absoluto de $f(x)$ em $[a, b]$ é alcançado no máximo (mínimo) relativo (ponto crítico) de $f(x)$ ou nos extremos do intervalo ($f(a)$ ou $f(b)$).

Portanto, para encontrar os extremos absolutos devemos primeiro determinar os extremos relativos e posteriormente comparar os valores de $f(x)$ nos pontos críticos com os valores $f(a)$ e $f(b)$. O maior valor será o máximo absoluto e o menor o mínimo absoluto.

Exemplo: Encontre os extremos relativos e absolutos de $y = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $[-2, 3]$?

Extremos Relativos.

Condição Necessária: $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) = \nexists$ não existe.

Como esta função possui derivada em todo seu domínio, apenas resta a condição $f'(x_0) = 0$. Sabendo que $f' = 3x^2 - 3$ segue que $3x(x - 1) = 0$ em $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Estes são os pontos críticos. Para saber se há extremos relativos devemos verificar a condição necessária, e neste exemplo vamos usar Teorema 11.

Condição Suficiente: máximo relativo se $f''(x_0) < 0$ e mínimo relativo se $f''(x_0) > 0$.

Já que $f''(x) = 6x$.

Em $x_1 = -1$ temos $f''(x_1 = -1) = -6 < 0$, logo haverá um máximo relativo.

Em $x_2 = 1$ temos $f''(x_2 = 1) = 6 > 0$, logo haverá um mínimo relativo.

Extremos Absolutos

Para determinar os extremos absolutos usamos o Teorema 12. Portanto, devemos comparar os valores de $f(x)$ nos pontos críticos e nos extremos do intervalo $[-2, 3]$.

Os valores da função nos pontos críticos são:

$$f(x_1 = -1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5,$$

$$f(x_2 = 1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1.$$

Os valores da função nos extremos do intervalo $[-2, 3]$ são:

$$f(x_3 = -2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1,$$

$$f(x_4 = 3) = (3)^3 - 3(3) + 3 = 21.$$

Comparando estes quatro valores $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))$ chegamos a conclusão que o máximo absoluto é alcançado no ponto $(x_4, f(x_4))$, e o mínimo absoluto é alcançado nos pontos $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$. Note que neste exemplo o mínimo relativo é também um mínimo absoluto, porém isto vai depender do intervalo $[a, b]$ que está sendo analisado.

Exercício: Encontre os extremos relativos e absolutos de $y = e^x \sen(x)$ no intervalo $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

Esboço de gráficos.

Para construir o gráfico de uma função é necessário conhecer as seguintes informações:

- i) determinar o domínio de definição da função e sua imagem,
- ii) determinar os pontos de descontinuidade da função,
- iii) determinar os pontos críticos da função com os intervalos de crescimento e decréscimo,
- iv) determinar os extremos relativos e absolutos da função,
- v) determinar se existe simetria, periodicidade, monotonia, ou sinal constante da função.

Exercício: Esboce o gráfico de $y = e^x \sen(x)$ no intervalo $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

Regra de L'Hospital - Bernoulli para o cálculo de limites indeterminados.

Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: Nestes casos temos duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que se tem derivada primeira numa vizinhança de x_0 e $g'(x_0) \neq 0$, tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$). Se existe o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então se verifica a fórmula de L'Hospital - Bernoulli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (1)$$

Esta regra também é válida se $x_0 = \infty$. No caso que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ continue com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, e as funções $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem as condições anteriormente exigidas, então o teorema pode ser aplicado novamente a $f'(x)$ e $g'(x)$ como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}. \quad (2)$$

E assim, a regra pode ser aplicada sucessivamente até conseguir resolver a indeterminação. Entretanto, é importante destacar que pode existir o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sem que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Neste caso não pode ser aplicada a Regra de L'Hospital - Bernoulli e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ deve ser resolvido usando os métodos estudados anteriormente para resolver limites indeterminados no **Tópico 3**.

Exemplo: Determine o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos(x) - 2}$?

Neste exemplo temos $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 + 2\cos(x) - 2$, e em $x_0 = 0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Ambas as funções têm derivadas em $V(0, \delta)$: $f'(x) = 4x^3$ e $g'(x) = 2x - 2\sin(x)$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x - 2\sin(x)} = \frac{0}{0}$ continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as derivadas: $f''(x) = 12x^2$ e $g''(x) = 2 - 2\cos(x)$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{2 - 2\cos(x)} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as segundas derivadas: $f'''(x) = 24x$ e $g'''(x) = 2\sin(x)$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2\sin(x)} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x}{2\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 12 \frac{x}{\sin(x)} = 12$. Portanto,

$$12 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos(x) - 2}.$$

Exemplo: Determine o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\operatorname{ctg}(x)}$?

Neste exemplo temos $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \operatorname{ctg}(x)$, e em $x_0 = 0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Ambas as funções têm derivadas em $V(0, \delta)$: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{0}{0}$ que continua com indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Podemos tentar usar a regra novamente as derivadas: $\hat{f}''(x) = (-\sin^2(x))' = -2\sin(x)\cos(x)$ e $\hat{g}''(x) = (x)' = 1$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\hat{f}''(x)}{\hat{g}''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{1} = -2\sin(0)\cos(0) = -2 * 0 * 1 = 0$. Portanto,

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\hat{f}''(x)}{\hat{g}''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\operatorname{ctg}(x)}.$$

Agora veremos um exemplo onde o limite existe e não pode ser usado a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(x)}$?

Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$ segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 1 * 0 = 0$.

Agora ao tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \text{ e } f'(x) = 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

$$g(x) = \operatorname{sen}(x) \text{ e } g'(x) = \cos(x).$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{\cos(x)}$. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ não existe, podemos concluir que não pode ser aplicada a Regra de L'Hospital - Bernoulli, embora o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ exista.

Indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$: Neste caso temos as funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, então o produto $f(x)g(x)$ pode ser transformado como segue:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ (indeterminação } \frac{0}{0}) = \frac{[\frac{1}{f(x)}]}{g(x)} \text{ (indeterminação } \frac{\infty}{\infty}). \quad (3)$$

Desta forma a indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$ é transformada em tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$: Neste caso temos as funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, então $f(x) - g(x)$ pode ser transformado como segue:

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right] \text{ (indeterminação } \infty \cdot 0) \text{ se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1. \quad (4)$$

Desta forma a indeterminação do tipo $\infty - \infty$ é transformada em tipo $0 \cdot \infty$ que pode ser transformada em $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ para poder tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $L = \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{x^2}]$.

Neste caso temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$ que pode ser transformada em indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ se aplicamos denominador comum.

$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2(x)}{x^2 \operatorname{sen}^2(x)}$, que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Porém, antes de aplicarmos a Regra de L'Hospital - Bernoulli, para facilitar os cálculos, vamos substituir o denominador por um infinitesimo equivalente. Isto é, sabendo que $\operatorname{sen}(x) \sim x$ quando $x \rightarrow 0$, então $x^2 \operatorname{sen}^2(x) \sim x^2 x^2 = x^4$ quando $x \rightarrow 0$. Logo, $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2(x)}{x^4}$, que continua sendo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$$f(x) = x^2 - \operatorname{sen}^2(x) \text{ e } f'(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x).$$

$$g(x) = x^4 \text{ e } g'(x) = 4x^3.$$

Logo, $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{4x^3}$, que continua sendo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$$f''(x) = 2 - 2\cos(2x).$$

$$g''(x) = 12x^2.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(2x)}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{6x^2}.$$

Sabendo que $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$ segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - 2\sin^2(x)]}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x)}{6x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} = L$.

Indeterminações do tipo 1^∞ ou 0^0 ou ∞^0 : Nestes casos temos $f(x)^{g(x)}$ e devemos tomar o logaritmo $f(x)^{g(x)} = e^{\left(\ln[f(x)^{g(x)}]\right)}$. Assim, $\ln[f(x)^{g(x)}] = g(x)\ln[f(x)]$ que resulta em indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$ que podemos transformar em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ para poder tentar usar a Regra de L'Hospital - Bernoulli.

Exemplo: Determine o $L = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}$?

Neste caso temos uma indeterminação do tipo 1^∞ que pode ser transformada em indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ usando propriedades do logaritmo e exponencial como segue.

$$e^{\ln(x)} = x, \text{ então } e^{\ln[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = [\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}. \text{ Logo,}$$

$L = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln[\cos(2x)]^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln[\cos(2x)]}$. Chamamos $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln[\cos(2x)]$ que é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de L'Hospital - Bernoulli temos:

$$f(x) = 3\ln[\cos(2x)] \text{ e } f'(x) = -6\operatorname{tg}(2x).$$

$$g(x) = x^2 \text{ e } g'(x) = 2x.$$

$$\text{Logo, } L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6\operatorname{tg}(2x)}{2x} = -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2x} = -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x\cos(2x)} = -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} = -6 \cdot 1 \cdot 1 = -6. \text{ Portanto, } L = e^{L_1} = e^{-6}.$$

Séries de Taylor e McLaurin.

Se uma função $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, possui derivadas contínuas até a ordem $(n-1)$ $\forall x \in [a, b]$, e existe a derivada de ordem n $\forall x \in]a, b[$, então a função pode ser representada como uma Série de Taylor entorno do ponto $x_0 \in [a, b]$ na forma a seguir:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned} \quad (5)$$

onde o ponto $\xi \in]a, b[$. Esta é a conhecida e muito útil Fórmula de Taylor que nesta notação pode ser descrita com um número finito de termos. Porém, para isto é necessário conhecer o ponto ξ . Outra forma de expressar a Série de Taylor em infinitos termos é da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,
\end{aligned} \tag{6}$$

onde $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $0! = 1$.

No caso particular que $x_0 = 0$ na Série de Taylor obtemos a Série de Maclaurin.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.
\end{aligned} \tag{7}$$

Deve ser dito que historicamente primeiro surgiu a Fórmula de Maclaurin para aproximar as funções entorno da origem ($x = 0$). Posteriormente foi generalizada para a Fórmula de Taylor que permite aproximar a função entorno de um ponto diferente da origem ($x = x_0 \neq 0$). Também, é importante ressaltar que quando aproximamos funções os infinitos termos da série são trocados por um número finito de termos de acordo com nossa necessidade de precisão na aproximação como segue:

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&\approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad \text{para Maclaurin,}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&\approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \text{para Taylor.}
\end{aligned} \tag{9}$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ no entorno do ponto $x_0 = 2$.

O primeiro que deve ser feito é calcular as derivadas da função no ponto x_0 .

- 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ e em $x_0 = 2$ temos $f(2) = 11$.
- 2) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ e em $x_0 = 2$ temos $f'(2) = 7$.
- 3) $f''(x) = 6x - 4$ e em $x_0 = 2$ temos $f''(2) = 8$.
- 4) $f'''(x) = 6$ e em $x_0 = 2$ temos $f'''(2) = 6$.
- 5) $f^n(x) = 0 \quad \forall n \geq 4$.

Agora substituímos na formula de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

$$f(x) = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 + \frac{0}{4!}(x-2)^4 + \dots$$

Note que todos os termos com derivadas de ordem maior ou igual a 4 são zero. Isto quer dizer que a formula de Taylor corresponde de forma exata à função

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3. \quad (10)$$

Isto porque a função é um polinômio de terceiro grau. Mas se for desconsiderado o termo da derivada terceira, então a formula de Taylor aproxima a função

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \approx 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2. \quad (11)$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = \text{sen}(x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0 .

- 1) $f(x) = \text{sen}(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = \text{sen}(0) = 0$.
- 2) $f'(x) = \cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = \cos(0) = 1$.
- 3) $f''(x) = -\text{sen}(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = -\text{sen}(0) = 0$.
- 4) $f'''(x) = -\cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = -\cos(0) = -1$.
- 5) $f^{iv}(x) = \text{sen}(x) = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = \text{sen}(0) = 0$.

Desta forma se repetem de forma ciclica as derivadas. Agora substituímos na formula de Taylor:

$$\text{sen}(x) = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \dots$$

que reorganizando obtemos

$$\text{sen}(x) = x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{-1}{11!}x^{11} + \dots$$

Note que o $\text{sen}(x)$ é uma função ímpar ($f(-x) = -f(x)$) e por isto na Formula de Taylor aparecem apenas os termos com potência ímpar.

Esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, ou seja que $\text{sen}(x)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{-1}{11!}x^{11} + \dots}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \frac{-1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \frac{-1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 + \frac{-1}{11!}x^{10} + \dots] = 1.$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = \cos(x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0 .

- 1) $f(x) = \cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = \cos(0) = 1$.
- 2) $f'(x) = -\text{sen}(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = -\text{sen}(0) = 0$.
- 3) $f''(x) = -\cos(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = -\cos(0) = -1$.
- 4) $f'''(x) = \text{sen}(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = \text{sen}(0) = 0$.

5) $f^{iv}(x) = \cos(x) = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = \cos(0) = 1$.

Desta forma se repetem de forma ciclica as derivadas. Agora substituímos na formula de Taylor:

$$\cos(x) = 1 + 0(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{0}{5!}(x-0)^5 + \dots$$

que reorganizando obtemos

$$\cos(x) = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{-1}{10!}x^{10} + \dots$$

Note que o $\cos(x)$ é uma função par ($f(-x) = f(x)$) e por isto na Formula de Taylor aparecem apenas os termos com potência par.

Também, esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-\cos(x))}{x^2} = 1$, ou seja que $(1 - \cos(x))$ é um infinitésimo equivalente a $\frac{x^2}{2}$ quando x tende para zero.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(x))}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{-1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{-1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + \dots)}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(x))}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\frac{1}{2!} + \frac{-1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 + \frac{-1}{8!}x^6 + \frac{1}{10!}x^8 + \dots) = 1 \end{aligned}$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = e^x$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0 .

1) $f(x) = e^x$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = e^0 = 1$.

2) $f'(x) = e^x = f(x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = e^0 = 1$.

Desta forma se repetem as derivadas. Agora substituímos na formula de Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \dots$$

que reorganizando obtemos

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

Note que e^x não é uma função par nem impar, e por isto na Formula de Taylor aparecem todos os termos com potência par e impar.

Também, esta formula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x-1)}{x} = 1$, ou seja que $(e^x - 1)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3 + \frac{1}{5!}x^4 + \dots) = 1 \end{aligned}$$

Exemplo: Obtenha a Série de Taylor da função $f(x) = \ln(1+x)$ no entorno do ponto $x_0 = 0$ (Série de Maclaurin).

Calculando as derivadas da função no ponto x_0 .

1) $f(x) = \ln(1+x)$ e em $x_0 = 0$ temos $f(0) = \ln(1+0) = 0$.

2) $f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$ e em $x_0 = 0$ temos $f'(0) = \frac{1}{(1+0)} = 1$.

3) $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ e em $x_0 = 0$ temos $f''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$.

4) $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ e em $x_0 = 0$ temos $f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$.

5) $f^{iv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$ e em $x_0 = 0$ temos $f^{iv}(0) = \frac{-6}{(1+0)^4} = -6$.

E assim sucessivamente a derivada de ordem n pode ser representada como $f^n(x) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \forall n \geq 1$ e em $x_0 = 0$ temos $f^n(0) = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$.

Agora substituímos na fórmula de Taylor:

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3 + \frac{-6}{4!}(x-0)^4 + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}(x-0)^n + \dots$$

que reorganizando obtemos

$$\ln(1+x) = x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-6}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^n + \dots$$

Note que $\ln(1+x)$ não é uma função par nem ímpar, e por isto na Fórmula de Taylor aparecem todos os termos com potência par e ímpar.

Também, esta fórmula de Taylor pode ser usada para provar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, ou seja que $\ln(1+x)$ é um infinitésimo equivalente a x quando x tende para zero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-6}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^n + \dots)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{-1}{2!}x + \frac{2}{3!}x^2 + \frac{-6}{4!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{n!}x^{(n-1)} + \dots) = 1$$

Todos estes exemplos mostram que a fórmula de Taylor pode ser usada para encontrar infinitésimos equivalentes de uma função no entorno de um ponto x_0 . Porém, esta não é a única utilidade da série de Taylor. Ela também pode ser usada para aproximar derivadas por diferenças finitas e etc.

Referências Bibliográficas

- 1- Wilfred Kaplan e Donald J. Lewis, Cálculo e Álgebra linear, V1, V2.
- 2- Serge Lang, Cálculo, V1.
- 3- Paulo Boulos, Introdução ao cálculo, V1, V2.
- 4- Edwin E. Moise, Cálculo um curso universitário, V1, V2.
- 5- Diva Marília Flemming e Miriam Buss Gonçalves, Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.
- 6- Djairo Guedes de Figueiredo, Análise I.
- 7- Aref Antar Neto, Trigonometria, V3.
- 8- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos e Funções, V1.
- 9- Gelson Iezzi, Fundamentos de matemática elementar: Logaritmos, V2.
- 10- Elon Lages Lima, A matemática do Ensino Médio. Coleção do professor de matemática, V1.
- 11- G. Baranenkova, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski, Problemas e exercícios de análise matemática. 4 edição, Editora Mir, 1984.