

# Mecânica Clássica e Quântica

Gustavo Benitez Alvarez

Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia  
Universidade Federal Fluminense

2026 - Notas de Aula: Aula 2

# Tópicos

- 1 Preliminares Matemáticos
  - Números e Vetores
  - Funções, Derivadas e Integrais
  - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
  
- 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
  - Queda Livre para Alturas Pequenas
  - Queda Livre para Alturas Grandes
  - Queda Livre com Rotação da Terra

# Tópicos

## 1 Preliminares Matemáticos

- Números e Vetores
- Funções, Derivadas e Integrais
- Alguns Cuidados em Cálculos e Medições

## 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre

- Queda Livre para Alturas Pequenas
- Queda Livre para Alturas Grandes
- Queda Livre com Rotação da Terra

## Números Reais.

**Números Naturais ( $\mathbb{N}$ ):** usados para contar  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Números Inteiros ( $\mathbb{Z}$ ):** a união do conjunto dos naturais com seu negativos  
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ):** todos os números que podem ser escritos como fração de números inteiros. Isto é,  $q \in \mathbb{Q}$  se  $q = \frac{m}{n}$  com  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$ . Inclui além de todo o conjunto dos inteiros, os decimais exatos ( $\frac{1}{2} = 0.5$ ,  $\frac{1}{4} = 0.25$ ) e periódicos ( $\frac{1}{3} = 0.33333\dots$ ,  $\frac{3}{7} = 0.428571 \text{ 428571 428571 } \dots$ ).

$\mathbb{Q} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, \dots, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{3}{7}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, 2, 3, \dots\}$ . Podem ser interpretados geometricamente como pontos numa linha reta!

**Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ ):** todos os números que não podem ser escritos como fração de números inteiros. Isto é,  $p \notin \mathbb{Q}$  se  $p \neq \frac{m}{n}$  com  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$ . São números com infinitos decimais que não são periódicos ( $\sqrt{2}$ ,  $e \approx 2.7182\dots$ ,  $\pi \approx 3.1415\dots$ ). Entre dois números racionais sempre há, pelo menos, um irracional. Existem mais números irracionais que racionais. Isto é, o infinito dos irracionais é maior que o infinito dos racionais.

**Números Reais ( $\mathbb{R}$ ):** a união do conjunto dos Racionais com os Irracionais  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ . Correspondem geometricamente a todos os pontos de uma linha reta!

## Números Complexos.

**Números Complexos ( $\mathbb{C}$ ):** a união do conjunto dos Reais com os Imaginários. Sua forma algébrica é  $z \in \mathbb{C}$  se  $z = a + \mathbf{i}b$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  (unidade imaginária). Note que  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\mathbf{i} = -1$ .

Note que o número complexo  $z = a + \mathbf{i}b$  é formado por dois números reais  $a$  e  $b$ . O número real  $a$  é chamado de parte real de  $z$ , denotado como  $a = \text{Re}(z)$ . O número real  $b$  é chamado de parte imaginária de  $z$ , denotado como  $b = \text{Im}(z)$ . O símbolo  $\mathbf{i}$  é a unidade imaginária definida como  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

Correspondem geometricamente a todos os pontos do Plano de Argand-Gauss! Este plano é definido por dois eixos ortogonais, onde o eixo horizontal é a parte real ( $a$ ) do número complexo e o vertical é a parte imaginária ( $b$ ) do número complexo.

Para todo número complexo  $z = a + \mathbf{i}b$  existe seu conjugado denotado por  $\bar{z}$  ou  $z^*$ , e definido como  $\bar{z} = a - \mathbf{i}b$ .

A Mecânica Clássica é formulada com Números Reais.

A Mecânica Quântica é formulada com Números Complexos.

# Tópicos

## 1 Preliminares Matemáticos

- Números e Vetores
- Funções, Derivadas e Integrais
- Alguns Cuidados em Cálculos e Medições

## 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre

- Queda Livre para Alturas Pequenas
- Queda Livre para Alturas Grandes
- Queda Livre com Rotação da Terra

## Conceitos Matemáticos Necessários: Função.

**Função de Uma Variável Real** ( $y = f(x)$ ):  $x$  é uma variável real independente ( $x \in \mathbb{R}$ ) e  $y$  é outra variável real dependente de  $x$  ( $y \in \mathbb{R}$ ). Se diz que existe uma *Relação Matemática* do tipo *Função* entre as variáveis  $x$  e  $y$  se para cada  $x$  corresponde um único  $y$ . Se usa a notação  $y = f(x)$  se a função é Explícita ou  $F(x, y) = 0$  se a função é Implícita.

Portanto, na Mecânica Newtoniana é assumido que a variável temporal  $t$  é independente, e a variável espacial  $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  é dependente. Isto é,  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  e  $z = h(t)$ , onde  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são funções incógnitas que descrevem o movimento de uma partícula pontual, as quais serão determinadas *Graças à Leis de Newton!* Os vetores unitários canônicos no *Sistema de Coordenadas Cartesianas* são  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ .

Desta forma, se conhecemos as *Forças* que atuam sobre uma partícula num instante de tempo  $t$  e as *Condições Iniciais* do problema, podemos determinar o *Vetor Posição* desta partícula em cada instante de tempo. Isto é, obtemos  $\vec{r}(\vec{t}) = (x(t), y(t), z(t))$ , o qual presuppõe de antemão, que *Nosso Mundo é Determinístico!*

**Como posso descobrir todo isso?** Com os conceitos de Derivadas, Integrais e o **Demônio de Laplace** (um experimento mental proposto em 1814 por Pierre-Simon Laplace, descrevendo uma inteligência hipotética que, ao conhecer a posição e velocidade exatas de cada átomo no universo e as leis da física, poderia calcular todo o passado e futuro.)!

## Conceitos Matemáticos Necessários: Derivada.

**Derivada de Uma Função de Uma Variável Real ( $y = f(x)$ ):**  $x$  é uma variável real independente ( $x \in \mathbb{R}$ ) e  $y$  é outra variável real dependente de  $x$  ( $y \in \mathbb{R}$ ). Se chama derivada de  $f(x)$  no ponto  $x_0$  ao limite  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  quando existe.

Se existe a derivada de uma função num ponto, então existe seu diferencial  $dy$   $dy = \frac{dy}{dx} dx$ , onde  $dx$  é o diferencial da variável independente.

Portanto, na Mecânica Newtoniana a velocidade de uma partícula no ponto  $\vec{r}$  no instante de tempo  $t$  é por definição  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$ .

O diferencial de velocidade de uma partícula no ponto  $\vec{r}$  no instante de tempo  $t$  é  $d\vec{v} = (\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt, \frac{dz}{dt} dt) = \frac{dx}{dt} dt \hat{i} + \frac{dy}{dt} dt \hat{j} + \frac{dz}{dt} dt \hat{k}$ .

A aceleração de uma partícula no ponto  $\vec{r}$  no instante de tempo  $t$  é por definição  $\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}) = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$ .

O diferencial de aceleração de uma partícula no ponto  $\vec{r}$  no instante de tempo  $t$  é  $d\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt} dt, \frac{dv_y}{dt} dt, \frac{dv_z}{dt} dt) = \frac{d^2x}{dt^2} dt \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} dt \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} dt \hat{k}$ .



## Conceitos Matemáticos Necessários: Integral.

**Integral de Uma Função de Uma Variável Real ( $y = f(x)$ ):**  $x$  é uma variável real independente ( $x \in \mathbb{R}$ ) e  $y$  é outra variável real dependente de  $x$  ( $y \in \mathbb{R}$ ).

Se chama Integral Definida de  $f(x)$  no intervalo  $x \in [a, b]$  ao limite

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} f(x_i) \Delta x$  quando existe, onde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  é uma partição do intervalo. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  (primitiva), então  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ .

Se chama Integral Indefinida (antiderivada) de  $f(x)$  a função  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária e  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  (primitiva). Note que

$$\int f(x)dx = \int \frac{dF(x)}{dx} dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Portanto, na Mecânica Newtoniana se a velocidade de uma partícula  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (f(t), g(t), h(t))$  é conhecida em todo instante de tempo  $t$ , é possível conhecer sua posição em todos os instantes de tempo:

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^t dx = x|_{t_0}^t = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(t)dt \text{ ou}$$
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dx = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(t)dt.$$

$$\text{Similarmente } y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t dy = y(t_0) + \int_{t_0}^t g(t)dt.$$

$$\text{Similarmente } z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t dz = z(t_0) + \int_{t_0}^t h(t)dt.$$

## Conceitos Matemáticos Necessários: Integral.

Os mesmos argumentos apresentados na tela anterior para a velocidade podem ser aplicados à aceleração. Portanto, na Mecânica Newtoniana se a aceleração de uma partícula  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\tilde{f}(t), \tilde{g}(t), \tilde{h}(t))$  é conhecida em todo instante de tempo  $t$ , é possível conhecer sua velocidade em todos os instantes de tempo:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t dv_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dv_x}{dt} dt = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{f}(t) dt.$$

$$\text{Similarmente } v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t dv_y = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dv_y}{dt} dt = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{g}(t) dt.$$

$$\text{Similarmente } v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t dv_z = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dv_z}{dt} dt = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{h}(t) dt.$$

Conhecendo agora a velocidade é possível conhecer a posição da partícula.

Em resumo, se é conhecida a aceleração da partícula em todo instante de tempo  $t$ , é possível conhecer sua velocidade em todos os instantes de tempo. Conhecendo a velocidade da partícula em todo instante de tempo  $t$ , é possível conhecer sua posição em todos os instantes de tempo. Porém, conhecer a aceleração em todo instante de tempo  $t$  é equivalente, pela **Segunda Lei de Newton** se a massa é constante, a conhecer a força atuando sobre a partícula em todo instante de tempo  $t$ .

Estes argumentos permite afirmar que a **Mecânica Newtoniana é Determinística por construção!** E que o **Demônio de Laplace** é um discípulo muito próximo de Deus!

O desafio agora para cada problema específico é determinar as forças que atuam sobre a partícula para estabelecer as equações da dinâmica newtoniana!

# Tópicos

## 1 Preliminares Matemáticos

- Números e Vetores
- Funções, Derivadas e Integrais
- Alguns Cuidados em Cálculos e Medições

## 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre

- Queda Livre para Alturas Pequenas
- Queda Livre para Alturas Grandes
- Queda Livre com Rotação da Terra

## Adimensionalização e Escala do Problema.

Para fazer um cálculo corretamente todas as grandezas devem estar medidas no **mesmo Sistema de Unidades**. Caso contrário erros catastróficos podem ocorrer.

**Adimensionalização do Problema:** é reescrever as equações substituindo as variáveis dimensionais por outras variáveis sem dimensão (adimensionais), utilizando valores de escala apropriados ou característicos. Por exemplo, as variáveis espacial  $x$  e temporal  $t$  que pertencem aos intervalos  $x \in [5\text{m}, 1000\text{m}]$  e temporal  $t \in [0\text{s}, 100\text{s}]$  podem ser adimensionalizadas como:  $\check{x} = \frac{x}{L^*}$  e  $\check{t} = \frac{t}{T^*}$ , onde  $L^*$  e  $T^*$  são comprimento e tempo característico do problema. Se  $L^* = 1\text{m}$  e  $T^* = 1\text{s}$  obtemos novas variáveis adimensionais que pertencem aos intervalos  $\check{x} \in [5, 1000]$  e  $\check{t} \in [0, 100]$ .

**Escala do Problema:** escolher as quantidades características que representam a ordem de grandeza do fenômeno. No exemplo de cima se  $L^* = 5\text{m}$  e  $T^* = 10\text{s}$  obtemos novas variáveis adimensionais que pertencem aos intervalos  $\check{x} \in [1, 200]$  e  $\check{t} \in [0, 10]$ . Se  $L^* = 1000\text{m}$  e  $T^* = 100\text{s}$  obtemos novas variáveis adimensionais que pertencem aos intervalos  $\check{x} \in [0.005, 1]$  e  $\check{t} \in [0, 1]$ .

A escala mais apropriada se escolhe considerando o fenômeno em estudo e as ferramentas disponíveis (PC, etc).

Exemplos de números adimensionais: Número de Reynolds  $Re$  (fluídos), Número de Péclet  $Pe$  (fluídos), Número de Mach  $Ma$  (aerodinâmica), etc.

## Cálculo usando PC: Aritmética de Precisão Finita e Infinita.

### Existe diferença entre Aritmética de Precisão Finita (Aritmética de Máquina) e Aritmética de Precisão Infinita (Matemática).

**Aritmética de Precisão Finita:** os números são representados com um número finito de bits 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc (tamanho da palavra). Para representar a parte decimal de um número usa o ponto flutuante (floating-point) que segue padrões IEEE (754), garantindo alta velocidade de processamento, menor consumo de memória e suporte nativo pelo hardware (CPU/GPU). Porém, apresenta **Erro de Arredondamento** para todos os números irracionais, racionais com decimais periódicos e decimais exatos com tamanho maior que o tamanho da palavra. Pode ocorrer **Overflow/Underflow** quando o número é muito grande ou muito pequeno para ser representado, resultando em erros ou Infinito Computacional. Operações com números em **Escala muito Diferentes** podem resultar em perda de precisão significativa.

**Aritmética de Precisão Infinita:** exatidão absoluta, sem erros de arredondamento (Matemática). Quando executada em PC utiliza bibliotecas de software para representar números com todos os dígitos que a memória do computador permitir. Consome mais memória que a Aritmética de Precisão Finita e é mais lenta. Se aplica em cálculos onde erros de arredondamento não são permitidos: criptografia (RSA), cálculo simbólico (CAS), cálculos astronômicos ou financeiros, etc.

# Tópicos

- 1 Preliminares Matemáticos
  - Números e Vetores
  - Funções, Derivadas e Integrais
  - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
- 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
  - Queda Livre para Alturas Pequenas
  - Queda Livre para Alturas Grandes
  - Queda Livre com Rotação da Terra

## Alturas Pequenas Sem Resistência do Ar. Lei de Newton $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ .

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Peq-Alt-Gemini.pdf**

## Alturas Pequenas Com Resistência do Ar $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ .

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre usando a mecânica newtoniana considerando a resistência do ar, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-L-Gemini.pdf,  
Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q2-Gemini.pdf,  
Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q3-Gemini.pdf



# Tópicos

- 1 Preliminares Matemáticos
  - Números e Vetores
  - Funções, Derivadas e Integrais
  - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
- 2 **Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre**
  - Queda Livre para Alturas Pequenas
  - **Queda Livre para Alturas Grandes**
  - Queda Livre com Rotação da Terra

## Alturas Grandes Sem Resistência do Ar.

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** Queda-Livre-Grand-Alt-0-Gemini.pdf,  
Queda-Livre-Grand-Alt-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-2-Gemini.pdf,  
Queda-Livre-Grand-Alt-3-Gemini.pdf

## Alturas Grandes Com Resistência do Ar.

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a resistência do ar usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** [Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-0-Gemini.pdf](#),  
[Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-1-Gemini.pdf](#), [Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-2-Gemini.pdf](#)

# Tópicos

- 1 Preliminares Matemáticos
  - Números e Vetores
  - Funções, Derivadas e Integrais
  - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
- 2 Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
  - Queda Livre para Alturas Pequenas
  - Queda Livre para Alturas Grandes
  - Queda Livre com Rotação da Terra

## Pequenas Alturas Sem Resistência do Ar.

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre considerando a rotação da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-0-Gemini.pdf,  
Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-2-Gemini.pdf

## Grandes Alturas Sem Resistência do Ar.

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a rotação da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** [Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-0-Gemini.pdf](#),  
[Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-1-Gemini.pdf](#), [Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-2-Gemini.pdf](#),  
[Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-3-Gemini.pdf](#)

**Comparativo considerando o ar:** [Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-0-Gemini.pdf](#).

## Grandes Alturas Com Resistência do Ar.

**O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.**

Foi consultada a IA Gemini em 19/03/2026 com a seguinte pergunta.

**Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a rotação da terra e a resistência do ar usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.**

**Resposta no Arquivo PDF:** [Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-1-Gemini.pdf](#),  
[Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-2-Gemini.pdf](#)