Mecânica Clássica e Quântica

Gustavo Benitez Alvarez

Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Universidade Federal Fluminense

2026 - Notas de Aula: Aula 2

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições

2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Números Reais.

Números Naturais ($\mathbb{N}$): usados para contar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$): a união do conjunto dos naturais com seu negativos $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Números Racionais ($\mathbb{Q}$): todos os números que podem ser escritos como fração de números inteiros. Isto é, $q \in \mathbb{Q}$ se $q = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Inclui além de todo o conjunto dos inteiros, os decimais exatos ($\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{4} = 0.25$) e periódicos ($\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$, $\frac{3}{7} = 0.428571\ 428571\ 428571\cdots$).
$\mathbb{Q} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, \ldots, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, 1, 2, 3, \ldots\}$. Podem ser interpretados geometricamente como pontos numa linha reta!

Números Irracionais ($\mathbb{I}$): todos os números que não podem ser escritos como fração de números inteiros. Isto é, $p \notin \mathbb{Q}$ se $p \neq \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. São números com infinitos decimais que não são periódicos ($\sqrt{2}$, $e \approx 2.7182\cdots$, $\pi \approx 3.1415\cdots$). Entre dois números racionais sempre há, pelo menos, um irracional. Existem mais números irracionais que racionais. Isto é, o infinito dos irracionais é maior que o infinito dos racionais.

Números Reais ($\mathbb{R}$): a união do conjunto dos Racionais com os Irracionais $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Correspondem geometricamente a todos os pontos de uma linha reta!

Números Complexos.

Números Complexos ($\mathbb{C}$): a união do conjunto dos Reais com os Imaginários. Sua forma algébrica é $z \in \mathbb{C}$ se $z = a + \mathbf{i}b$, onde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária). Note que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{ii} = -1$.

Note que o número complexo $z = a + \mathbf{i}b$ é formado por dois números reais a e b. O número real a é chamado de parte real de z, denotado como $a = \mathrm{Re}(z)$. O número real b é chamado de parte imaginária de z, denotado como $b = \mathrm{Im}(z)$. O símbolo $\mathbf{i}$ é a unidade imaginária definida como $\mathbf{i}^2 = -1$.

Correspondem geometricamente a todos os pontos do Plano de Argand-Gauss! Este plano é definido por dois eixos ortogonais, onde o eixo horizontal é a parte real (a) do número complexo e o vertical é a parte imaginária (b) do número complexo.

Para todo número complexo $z = a + \mathbf{i}b$ existe seu conjugado denotado por $\bar{z}$ ou z^*, e definido como $\bar{z} = a - \mathbf{i}b$.

A Mecânica Clássica é formulada com Números Reais.

A Mecânica Quântica é formulada com Números Complexos.

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Conceitos Matemáticos Necessários: Função.

Função de Uma Variável Real ($y = f(x)$): x é uma variável real independente ($x \in \mathbb{R}$) e y é outra variável real dependente de x ($y \in \mathbb{R}$). Se diz que existe uma *Relação Matemática* do tipo *Função* entre as variáveis x e y se para cada x corresponde um único y. Se usa a notação $y = f(x)$ se a função é Explícita ou $F(x, y) = 0$ se a função é Implícita.

Portanto, na Mecânica Newtoniana é assumido que a variável temporal t é independente, e a variável espacial $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é dependente. Isto é, $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$, onde $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são funções incógnitas que descrevem o movimento de uma partícula pontual, as quais serão determinadas *Graças à Leis de Newton*! Os vetores unitários canônicos no *Sistema de Coordenadas Cartesianas* são $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ e $\hat{k} = (0, 0, 1)$.

Desta forma, se conhecemos as *Forças* que atuam sobre uma partícula num instante de tempo t e as *Condições Iniciais* do problema, podemos determinar o *Vetor Posição* desta partícula em cada instante de tempo. Isto é, obtemos $r(\vec{t}) = (x(t), y(t), z(t))$, o qual presupõe de antemão, que *Nosso Mundo* é **Determinístico**!

Como posso descubrir todo issso? Com os conceitos de Derivadas, Integrais e o **Demônio de Laplace** (um experimento mental proposto em 1814 por Pierre-Simon Laplace, descrevendo uma inteligência hipotética que, ao conhecer a posição e velocidade exatas de cada átomo no universo e as leis da física, poderia calcular todo o passado e futuro.)!

Conceitos Matemáticos Necessários: Derivada.

Derivada de Uma Função de Uma Variável Real ($y = f(x)$): x é uma variável real independente ($x \in \mathbb{R}$) e y é outra variável real dependente de x ($y \in \mathbb{R}$). Se chama derivada de $f(x)$ no ponto x_0 ao limite $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando existe.

Se existe a derivada de uma função num ponto, então existe seu diferencial dy $dy = \frac{dy}{dx}dx$, onde dx é o diferencial da variável independente.

Portanto, na Mecânica Newtoniana a velocidade de uma partícula no ponto $\vec{r}$ no instante de tempo t é por definição $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$.

O diferencial de velocidade de uma partícula no ponto $\vec{r}$ no instante de tempo t é $d\vec{v} = (\frac{dx}{dt}dt, \frac{dy}{dt}dt, \frac{dz}{dt}dt) = \frac{dx}{dt}dt\hat{i} + \frac{dy}{dt}dt\hat{j} + \frac{dz}{dt}dt\hat{k}$.

A aceleração de uma partícula no ponto $\vec{r}$ no instante de tempo t é por definição $\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$.

O diferencial de aceleração de uma partícula no ponto $\vec{r}$ no instante de tempo t é $d\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}dt, \frac{dv_y}{dt}dt, \frac{dv_z}{dt}dt) = \frac{d^2x}{dt^2}dt\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}dt\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}dt\hat{k}$.

Conceitos Matemáticos Necessários: Integral.

Integral de Uma Função de Uma Variável Real ($y = f(x)$): x é uma variável real independente ($x \in \mathbb{R}$) e y é outra variável real dependente de x ($y \in \mathbb{R}$).

Se chama Integral Definida de $f(x)$ no intervalo $x \in [a, b]$ ao limite $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{l=1}^{n\to\infty} f(x_l)\Delta x$ quando existe, onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ é uma partição do intervalo. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (primitiva), então $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Se chama Integral Indefinida (antiderivada) de $f(x)$ a função $\int f(x)dx = F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária e $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (primitiva). Note que $\int f(x)dx = \int \frac{dF(x)}{dx} dx = \int dF(x) = F(x) + C$.

Portanto, na Mecânica Newtoniana se a velocidade de uma partícula $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (f(t), g(t), h(t))$ é conhecida em todo instante de tempo t, é possível conhecer sua posição em todos os instantes de tempo:

$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^t dx = x|_{t_0}^t = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(t)dt$ ou
$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dx = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(t)dt$.

Similarmente $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t dy = y(t_0) + \int_{t_0}^t g(t)dt$.

Similarmente $z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t dz = z(t_0) + \int_{t_0}^t h(t)dt$.

Conceitos Matemáticos Necessários: Integral.

Os mesmos argumentos apresentados na tela anterior para a velocidade podem ser aplicados à aceleração. Portanto, na Mecânica Newtoniana se a aceleração de uma partícula $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\tilde{f}(t), \tilde{g}(t), \tilde{h}(t))$ é conhecida em todo instante de tempo t, é possível conhecer sua velocidade em todos os instantes de tempo:

$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} dv_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dv_x}{dt} dt = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(t) dt.$

Similarmente $v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} dv_y = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dv_y}{dt} dt = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{g}(t) dt.$

Similarmente $v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} dv_z = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dv_z}{dt} dt = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{h}(t) dt.$

Conhecendo agora a velocidade é possível conhecer a posição da partícula.

Em resumo, se é conhecida a aceleração da partícula em todo instante de tempo t, é possível conhecer sua velocidade em todos os instantes de tempo. Conhecendo a velocidade da partícula em todo instante de tempo t, é possível conhecer sua posição em todos os instantes de tempo. Porém, conhecer a aceleração em todo instante de tempo t é equivalente, pela **Segunda Lei de Newton** se a massa é constante, a conhecer a força atuando sobre a partícula em todo instante de tempo t.

Estes argumentos permite afirmar que a **Mecânica Newtoniana é Determinística por construção**! E que o **Demônio de Laplace** é um discípulo muito próximo de Deus!

O desafio agora para cada problema específico é determinar as forças que atuam sobre a partícula para estabelecer as equações da dinâmica newtoniana!

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Adimensionalização e Escala do Problema.

Para fazer um cálculo corretamente todas as grandezas devem estar medidas no mesmo Sistema de Unidades. Caso contrário erros catastróficos podem ocorrer.

Adimensionalização do Problema: é reescrever as equações substituindo as variáveis dimensionais por outras variáveis sem dimensão (adimensionais), utilizando valores de escala apropriados ou característicos. Por exemplo, as variáveis espacial x e temporal t que pertencem aos intervalos $x \in [5\text{m}, 1000\text{m}]$ e temporal $t \in [0\text{s}, 100\text{s}]$ podem ser adimensionalizadas como: $\check{x} = \frac{x}{L^*}$ e $\check{t} = \frac{t}{T^*}$, onde L^* e T^* são comprimento e tempo caraterístico do problema. Se $L^* = 1\text{m}$ e $T^* = 1\text{s}$ obtemos novas variáveis adimensionais que pertecem aos intervalos $\check{x} \in [5, 1000]$ e $\check{t} \in [0, 100]$.

Escala do Problema: escolher as quantidades características que representam a ordem de grandeza do fenômeno. No exemplo de cima se $L^* = 5\text{m}$ e $T^* = 10\text{s}$ obtemos novas variáveis adimensionais que pertecem aos intervalos $\check{x} \in [1, 200]$ e $\check{t} \in [0, 10]$. Se $L^* = 1000\text{m}$ e $T^* = 100\text{s}$ obtemos novas variáveis adimensionais que pertecem aos intervalos $\check{x} \in [0.005, 1]$ e $\check{t} \in [0, 1]$.

A escala mais apropriada se escolhe considerando o fenômeno em estudo e as ferramentas disponíveis (PC, etc).

Exemplos de números adimensionais: Número de Reynolds *Re* (fluídos), Número de Péclet *Pe* (fluídos), Número de Mach *Ma* (aerodinâmica), etc.

Cálculo usando PC: Aritmética de Precisão Finita e Infinita.

Existe diferença entre Aritmética de Precisão Finita (Aritmética de Máquina) e Aritmética de Precisão Infinita (Matemática).

Aritmética de Precisão Finita: os números são representados com um número finito de bits 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc (tamanho da palavra). Para representar a parte decimal de um número usa o ponto flutuante (floating-point) que segue padrões IEEE (754), garantindo alta velocidade de processamento, menor consumo de memória e suporte nativo pelo hardware (CPU/GPU). Porém, apresenta **Erro de Arredondamento** para todos os números irracionais, racionais com decimais periódicos e decimais exatos com tamanho maior que o tamanho da palavra. Pode ocorrer **Overflow**/**Underflow** quando o número é muito grande ou muito pequeno para ser representado, resultando em erros ou Infinito Computacional. Operações com números em **Escalas muito Diferentes** podem resultar em perda de precisão significativa.

Aritmética de Precisão Infinita: exatidão absoluta, sem erros de arredondamento (Matemática). Quando executada em PC utiliza bibliotecas de software para representar números com todos os dígitos que a memória do computador permitir. Consome mais memória que a Aritmética de Precisão Finita e é mais lenta. Se aplica em cálculos onde erros de arredondamento não são permitidos: criptografia (RSA), cálculo simbólico (CAS), cálculos astronômicos ou financeiros, etc.

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Alturas Pequenas Sem Resistência do Ar. Lei de Newton $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Peq-Alt-Gemini.pdf

Alturas Pequenas Com Resistência do Ar $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre usando a mecânica newtoniana considerando a resistência do ar, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-L-Gemini.pdf, Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q2-Gemini.pdf, Queda-Livre-Peq-Alt-Ar-Q3-Gemini.pdf

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Alturas Grandes Sem Resistência do Ar.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Grand-Alt-0-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-2-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-3-Gemini.pdf

Alturas Grandes Com Resistência do Ar.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a resistência do ar usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-0-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Grand-Alt-Ar-2-Gemini.pdf

Tópicos

1. Preliminares Matemáticos
   - Números e Vetores
   - Funções, Derivadas e Integrais
   - Alguns Cuidados em Cálculos e Medições
2. Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre
   - Queda Livre para Alturas Pequenas
   - Queda Livre para Alturas Grandes
   - Queda Livre com Rotação da Terra

Pequenas Alturas Sem Resistência do Ar.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre considerando a rotação da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-0-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Peq-Alt-2-Gemini.pdf

Grandes Alturas Sem Resistência do Ar.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 18/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a rotação da terra usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-0-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-2-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-3-Gemini.pdf

Comparativo considerando o ar: Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-0-Gemini.pdf.

Grandes Alturas Com Resistência do Ar.

O Sistema de Referência pode ser colocado no Corpo Fixo simplificando a formulação das equações do movimento.

Foi consultada a IA Gemini em 19/03/2026 com a seguinte pergunta.

Formule e resolva o problema de queda livre desde uma altura comparável com o raio da terra considerando a rotação da terra e a resistência do ar usando a mecânica newtoniana, além de fazer uma figura explicativa ou diagrama.

Resposta no Arquivo PDF: Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-1-Gemini.pdf, Queda-Livre-Rot-Grand-Alt-Ar-2-Gemini.pdf

Principais Resultados para Queda Livre de Alturas Pequenas.

Sem Rotação da Terra: altura no eixo y, inicial $y = h$ e final $y = 0$ (origem), $v_y(t=0) = v_0 = 0$.
Sem Ar: única força atuante $F = -mg$, $g = G\frac{M}{R^2} \approx 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, logo $-mg = ma_y$, $v_y(t) = v_0 + a_y t = -gt$, $y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_y t^2 = h - \frac{1}{2}gt^2$, tempo de queda $y(t_q) = 0$, $t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $v_y(t_q) = -\sqrt{2gh}$. Exemplo, se $h = 80$m, então $t_q \approx \sqrt{\frac{2\cdot 80}{10}} = 4$s e $v_y(t_q) \approx -40$m/s $= -144$km/h
Com Resistência Linear do Ar: $F = -kv$, $a_y \neq const$, logo $m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$, resolvendo a EDO obtemos $v_y(t) = \frac{mg}{k}[1 - e^{-\frac{k}{m}t}]$, velocidade terminal v_t quando $t \to \infty$, $v_t = \frac{mg}{k}$
Com Resistência Quadrática do Ar: $F = -kv^2$, $a_y \neq const$, logo $m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y^2$, velocidade terminal quando a aceleração é zero, logo $a_y = 0 \Rightarrow mg = kv_t^2$, $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, resolvendo a EDO obtemos $v_y(t) = -v_t \tanh(\frac{gt}{v_t})$, quando $t \to \infty$ a velocidade é constante $v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, integrando a velocidade obtemos $y(t) = \int_0^t v_y dt = \frac{v_t^2}{g}\ln(\cosh(\frac{gt}{v_t}))$, $y(t) = y(t=0) + \int_0^t v_y dt = h - \frac{v_t^2}{g}\ln(\cosh(\frac{gt}{v_t}))$, derivando a velocidade obtemos $a_y(t) = \frac{-g}{\cosh^2(\frac{gt}{v_t})}$, $t_q = \frac{v_t}{g}[\frac{hg}{v_t^2} + \sqrt{(\frac{hg}{v_t^2})^2 - 1}]$ se $\frac{hg}{v_t^2} \geq 1 \Leftrightarrow t_q = \frac{h}{v_t} + \sqrt{(\frac{hk}{m})^2 - 1}$ se $\frac{hk}{m} \geq 1$. Exemplo, $h = 80$m, $m = 20$kg, $k = 0,25$kg/m, $\frac{hk}{m} = 1$ e $t_q = \frac{h}{v_t} \approx 2,85$s.
Com Rotação da Terra e Sem Ar: Força de Coriolis $\vec{F}_c = -2m\vec{w} \times \vec{v}$ e centrifuga (desconsiderada).
Eixo z radial para fora da terra, eixo x direção leste, eixo y direção norte. Rotação lenta permite aproximar $v_z \approx -gt$, $\vec{w} = 0\hat{i} + w\cos(\phi)\hat{j} + w\cos(\phi)\hat{k}$, $w \approx 7,2910^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\vec{F}_z = -m\vec{g}$ e $\vec{F}_x = -2m(\vec{w} \times \vec{v})_x$, logo $a_x = 2w(-gt)\cos(\phi)$, integrando no tempo a_x obtemos $v_x(t) = -wgt^2\cos(\phi)$, $x(t) = -\frac{1}{3}wgt^3\cos(\phi)$, $t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $x_f = \frac{1}{3}w\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cos(\phi)$, $\phi = 0$ no equador, se $h = 100$ m $x_f = 2,2$ cm para o leste.

Principais Resultados para Queda Livre de Alturas Grandes.

Sem Rotação da Terra.
Sem Ar: $F = -G\frac{Mm}{r^2}$, $r = R + h$, logo $m\frac{d^2h}{dt^2} = -G\frac{Mm}{(R+h)^2}$ EDO não linear. Conservação da energia $T_i + U_i = T_f + U_f$, $U_i = -G\frac{Mm}{R+h}$, $T_i = 0$, $T_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, $U_f = -G\frac{Mm}{R}$, $g = \frac{GM}{R^2}$, $v_f = \sqrt{2gR(1 - \frac{R}{R+h})}$, para $h = R$, $t_q = (\frac{\pi}{2} + 1)\sqrt{\frac{R}{g}}$ Exemplo, $R = 6,37 \cdot 10^6$m, então $v_f \approx 7900$m/s e $t_q \approx 806$s.
Com Ar: $F = \rho(r)kv^2$, densidade varia com h, $\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r-R}{H}}$, $r = h$ escala de altura $H \approx 8,5$km, ρ_0 nível do mar. Corpo cai em quase vácuo encontrando resistência a partir de $h = 100$km. $m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^2} + \frac{1}{2}C_dA\rho(r)(\frac{dr}{dt})^2$ sem solução exata (Runge-Kutta).
Com Rotação da Terra e Sem Ar: Força de Coriolis.
$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}$ e $\vec{F}_c = -2m\vec{w} \times \vec{v}$, $w \approx 7,2910^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, Soluções numéricas.
Com Rotação da Terra e Ar: Força de Coriolis.
$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}$, $\vec{F}_c = -2m\vec{w} \times \vec{v}$, $w \approx 7,2910^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\vec{F}_{ar} = \frac{1}{2}C_dA\rho(r)(\frac{dr}{dt})^2$, $\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$, Soluções numéricas. O movimento na vertical é dominado por $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_{ar}$. O desvio na horizontal é dominado por $\vec{F}_c$.