

# Mecânica Clássica e Quântica

Gustavo Benitez Alvarez

Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia  
Universidade Federal Fluminense

2026 - Notas de Aula: Aula 3

# Tópicos

- 1 Problema de Dois Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional (Problema de Kepler)
  
- 2 Problema de Três Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional

# Tópicos

- 1 Problema de Dois Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional (Problema de Kepler)
- 2 Problema de Três Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional

## Interação Gravitacional entre Duas Partículas Pontuais com Massa $m_1$ e $m_2$ .

Suponha um Sistema de Referência no qual as partículas têm as posições  $\vec{r}_1(t)$  e  $\vec{r}_2(t)$  em cada instante de tempo. Então, as equações de movimentos são:

$$(Eq.1) \quad m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

com as condições iniciais  $\vec{r}_1(t=0) = \vec{r}_1(0)$ ,  $\vec{v}_1(t=0) = \vec{v}_1(0)$  e  $\vec{r}_2(t=0) = \vec{r}_2(0)$ ,  $\vec{v}_2(t=0) = \vec{v}_2(0)$ .

Isto é um sistema de 6 equações diferenciais ordinárias acopladas que pode ser simplificado fazendo uma mudança de variáveis. Usando as coordenadas do Centro de Massa  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  e as coordenadas relativas entre as partículas  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  obtemos um novo sistema de 6 equações desacopladas.

Note que somando as duas equações (Eq.1) e dividindo pela massa total  $M = m_1 + m_2$  obtemos  $M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$  (Eq.2), mostrando que o **Momento Linear Total** se conserva, já que não há forças externas atuando, além das forças internas.

Está equação está desacoplada porque não dependem de  $\vec{r}$ , e pode ser integrada duas vezes para determinar a posição do centro de massa em cada instante de tempo.

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{R}(t_0)}{dt} = \text{const} = \vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \vec{V}_{CM}(t - t_0)$$

Centro de Massa em Movimento Retilíneo Uniforme,  $\vec{R}(t_0) = \vec{R}(0) = \frac{m_1 \vec{r}_1(0) + m_2 \vec{r}_2(0)}{m_1 + m_2}$  e

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1(0) + m_2 \vec{v}_2(0)}{m_1 + m_2} = \vec{V}_{CM}(t) \quad \text{para qualquer instante de tempo } t.$$

## Interação Gravitacional entre Duas Partículas Pontuais com Massa $m_1$ e $m_2$ .

Falta resolver as três equações para  $\vec{r}$ . Note que dividindo as (Eq.1) por  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente e subtraindo ambas equações obtemos  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{(m_1+m_2)}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$  (Eq.3) ou

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M\mu}{|\vec{r}|^3}\vec{r}, \text{ onde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ é chamada de Massa Reduzida.}$$

Esta equação está desacoplada porque não dependem de  $\vec{R}$ , e pode ser entendida como a equação do movimento de uma partícula de massa fictícia reduzida  $\mu$  submetida à ação da gravidade de um corpo fixo com massa fictícia  $M$  localizado na origem  $\vec{r} = \vec{0}$  (Problema de Um Corpo Fixo e Outro Livre - Aula 2).

Já que a única força atuante é a gravidade (força conservativa), então  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$  e  $U = -G\frac{M\mu}{|\vec{r}|}$ . Portanto, a **Energia Mecânica Total** se conserva:  $E = T + U = \text{const.}$

O **Torque Externo** resultante é zero porque não há **Força Externa** resultante. Logo, o **Momento Angular Total** se conserva:  $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \text{const}$  ou  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ .

Substituindo acima as transformações inversas  $\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r}$  e  $\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}$  obtemos

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \mu\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_r. \text{ Derivando esta equação obtemos}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M\left[\frac{d\vec{R}}{dt} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{R} \times \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right] + \mu\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = M\left[\vec{R} \times \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right] + \mu\left[\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right], \text{ onde}$$

$\frac{d\vec{R}}{dt} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = 0$  e  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$  porque o produto vetorial de vetores paralelos é zero.

Pela Eq.2  $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$ , logo  $\vec{R} \times \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$ . Pela Eq.3  $\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$ , já que são paralelos.

## Interação Gravitacional entre Duas Partículas Pontuais com Massa $m_1$ e $m_2$ .

**Produto Vetorial:** entre os vetores  $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  e  $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$  é um novo vetor perpendicular ao plano contendo os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Se define como

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= [a_y b_z - a_z b_y]\hat{i} + [a_z b_x - a_x b_z]\hat{j} + [a_x b_y - a_y b_x]\hat{k} \\ &= ([a_y b_z - a_z b_y], [a_z b_x - a_x b_z], [a_x b_y - a_y b_x]) \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Logo, para  $\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$  temos  $\vec{r} \times \vec{r} = [r_y r_z - r_z r_y]\hat{i} + [r_z r_x - r_x r_z]\hat{j} + [r_x r_y - r_y r_x]\hat{k}$  mostrando que o produto vetorial de vetores paralelos é zero.

Já que  $\vec{L}_r = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$  se conserva, então o movimento relativo entre as partículas está limitado ao plano perpendicular a  $\vec{L}_r$ . Isto permite simplificar as equações se escolhermos o eixo z paralelo a  $\vec{L}_r$ .

Logo, o **Momento Angular do Centro de Massa** se conserva  $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = 0$ , e o

**Momento Angular Relativo** se conserva  $\frac{d\vec{L}_r}{dt} = 0$ .

Mais detalhes consultar o livro: **Tópicos de Mecânica Clássica, Marcus A. M. de Aguiar, 2026.**

# Tópicos

- 1 Problema de Dois Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional (Problema de Kepler)
  
- 2 Problema de Três Corpos Livres Interagindo
  - Interação Gravitacional

## Interação Gravitacional entre Três Partículas Pontuais com Massa $m_1$ , $m_2$ e $m_3$ .

Suponha um Sistema de Referência no qual as partículas têm as posições  $\vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ ,  $\vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$  e  $\vec{r}_3(t) = (x_3(t), y_3(t), z_3(t))$  em cada instante de tempo  $t$ . Então, as equações de movimentos são:

$$(Eq.1) \quad m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \frac{Gm_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3),$$

$$(Eq.2) \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \frac{Gm_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3),$$

$$(Eq.3) \quad m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -\frac{Gm_3 m_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) - \frac{Gm_3 m_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2),$$

com as condições iniciais  $\vec{r}_1(t=0) = \vec{r}_1(0)$ ,  $\vec{v}_1(t=0) = \vec{v}_1(0)$ ,  $\vec{r}_2(t=0) = \vec{r}_2(0)$ ,  $\vec{v}_2(t=0) = \vec{v}_2(0)$  e  $\vec{r}_3(t=0) = \vec{r}_3(0)$ ,  $\vec{v}_3(t=0) = \vec{v}_3(0)$ .

Isto é um sistema de 9 equações diferenciais ordinárias acopladas que ainda ninguém conseguiu simplificar como no caso do problema de dois corpos (fazendo uma mudança de variáveis ou outra coisa). No caso do problema de dois corpos, usando as coordenadas do Centro de Massa  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  e as coordenadas relativas entre as partículas  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  é possível desacoplar as EDOs e apresentar uma Solução Geral para o problema.

O problema dos Três Corpos tem sua origem na **Mecânica Celeste** e consiste em determinar as trajetórias ou **órbitas** de três corpos submetidos apenas à força gravitacional newtoniana entre eles.

## Alguns Pensadores que contribuíram para a solução deste problema.

Isaac Newton, formulou matematicamente o Problema. Não encontrou uma Solução Geral como no caso de Dois Corpos. Posteriormente, muitos pensadores estudaram o Problema sem encontrar uma Solução Geral, propondo Soluções Particulares.

**Isaac Newton (1642-1727)** - Estudos Geométricos.

**Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)** - Solução aproximada para o Problema Lunar.

**Leonhard Euler (1707-1783)** - Método para calcular as perturbações nos movimentos planetários.

**Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)** - Mostrou que o problema poderia ser reduzido de um sistema de equações diferenciais de ordem dezoito para um de ordem sete.

**Carl Jacobi (1804-1851)** - Novos métodos de integração de equações diferenciais.

**William Rowan Hamilton (1795-1865)** - Novos métodos de integração de equações diferenciais.

**Charles-Eugène Delaunay (1816-1872)** - Uso de séries.

**George Hill (1838-1914)** - Soluções periódicas para o problema.

**Henri Poincaré (1854-1912)** - Trajetórias dos corpos são extremamente sensíveis às condições iniciais, ou seja, uma pequena mudança nas condições iniciais pode causar uma drástica mudança nas posições finais (Caos Determinístico).

**Anders Lindstedt (1854-1939)** - Técnica para aproximar uniformemente soluções periódicas de EDOs quando as abordagens de perturbação regulares falham (método de Lindstedt-Poincaré).

**Jacques Hadamard (1865-1963)** - Teoria dos sistemas dinâmicos.

**George David Birkhoff (1884-1944)** - Teoria dos sistemas dinâmicos.

## Relevância deste Problema.

**Prêmio do Rei Oscar II** da Suécia a finais do Século XIX para qualquer um que encontrasse uma Solução Geral do Problema dos  $N$  Corpos.

O prêmio foi entregue a **Poincaré**, mesmo sem ter resolvido o problema original. (A primeira versão de seu trabalho continha sérios erros). A versão final impressa contém muitas ideias importantes para o desenvolvimento da **Teoria do Caos**.

O problema como definido originalmente foi finalmente resolvido em 1912 pelo matemático finlandês **Karl Fritiof Sundman** para  $N = 3$ . Este método usa série de potência cuja convergência é muito lenta!

Algumas Aplicações:

- 1- Movimento do Sistema Sol-Terra-Lua.
- 2- Movimento de um Planeta ou de um Cometa sob a atração principalmente do Sol e Júpiter.
- 3- Movimento de um Satélite Artificial entre a Terra e a Lua

**Integrais de Movimento:** são as variáveis que permanecem constantes no tempo.

Bruns mostrou que neste problema existem 10 integrais de movimento:

- 3 Integrais de Movimento para o Momento Linear Total (vetor),
- 3 Integrais de Movimento para o Centro de Massa (vetor),
- 3 Integrais de Movimento para o Momento Angular Total (vetor),
- 1 Integral de Movimento para a Energia Total (escalar).

*O Problema continua sendo estudado nos dias de hoje!*

Vale a pena consultar na Internet, por exemplo, Problema de três corpos - Wikipédia.

