

# Mecânica Clássica e Quântica

Gustavo Benitez Alvarez

Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia  
Universidade Federal Fluminense

2026 - Notas de Aula: Aula 4

# Tópicos

- 1 Elementos do Cálculo Variacional
  - Definições Necessárias
- 2 Exemplos de Aplicação
  - Menor Distância
  - A Catenóide e Catenária
  - A Braquistócrona

# Tópicos

- 1 Elementos do Cálculo Variacional
  - Definições Necessárias
  
- 2 Exemplos de Aplicação
  - Menor Distância
  - A Catenóide e Catenária
  - A Braquistócrona

## Função e Classe de Funções.

Suponha dois conjuntos de números reais  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definição:** Se diz que existe uma relação matemática do tipo função entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  se para cada elemento  $x \in X$  corresponde um único elemento  $y \in Y$ . A notação usada é  $f : X \rightarrow Y$  ou  $y = f(x)$ , onde  $x$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente. O conjunto  $X$  é chamado de **Domínio** da função e o conjunto  $Y$  chamado de **Contradomínio**. O conjunto de todos os  $y$  para os quais existe um  $x$  tal que  $y = f(x)$  se chama **Imagem** da função. Os pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $x \in \text{Dom } f$  e  $y \in \text{Im } f$  formam o gráfico da função  $f$ .

Se usa o termo **Classe de Funções** para referir-se a um conjunto de funções que compartilham propriedades comuns. Por exemplo:

**Classe  $C^0$ :** O conjunto de funções contínuas, mas não necessariamente deriváveis.

**Classe  $C^k$ :** O conjunto de funções que possuem derivadas até a ordem  $k$  contínuas ( $f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^k f}{dx^k}$  ou  $f, f', f'', \dots, f^{(k)}$  ou  $f, \dot{f}, \ddot{f}, \dots, \overset{\cdot}{f}$  são contínuas).

**Classe  $C^\infty$ :** (Funções Suaves) O conjunto de funções que possuem derivadas de todas as ordens, contínuas em seu domínio.

**Funções Analíticas:** O conjunto de funções que, localmente, podem ser expandidas em séries de Taylor.

**Classe  $L^2(a, b)$ :** (Funções Quadrado Integráveis) O conjunto de funções tal que a integral  $\int_a^b [f(x)]^2 dx$  é finita.

## Funcional e Exemplos de Funcionais.

Suponha dois conjuntos  $\mathcal{F}$  e  $Y$ . O conjunto  $Y \subseteq \mathbb{R}$  são números reais. O conjunto  $\mathcal{F}$  é formado pelos elementos de uma **Classe de Funções**, ou seja, é o conjunto de funções que compartilham propriedades comuns.

**Definição:** Se chama funcional  $\mathcal{J}$  definido no espaço vetorial de funções  $\mathcal{F}$ , à correspondência estabelecida entre os elementos do conjuntos  $\mathcal{F}$  e os elementos do conjunto  $Y$ , tal que para cada elemento  $f \in \mathcal{F}$  corresponde um único elemento de  $Y$ . A notação usada é  $\mathcal{J} : \mathcal{F} \rightarrow Y$  ou  $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}\{f(x)\} \in Y \subseteq \mathbb{R}$ , onde  $f(x) \in \mathcal{F}$  é o elemento genérico da **Classe de Funções**  $\mathcal{F}$ .

Exemplo de Funcionais:

1)  $\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , onde  $F(x)$  é a primitiva de  $f(x)$ , Isto é,  $[F(x)]' = \frac{dF}{dx} = f(x)$  a derivada de  $F(x)$  em relação a  $x$  é igual a  $f(x)$ .

2)  $\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty$ .

3)  $\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 + \left[ \frac{df}{dx} \right]^2 \right\} dx < \infty$ .

4)  $\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_a^b w(x) \mathcal{G}\{f(x), \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^k f}{dx^k}, x\} dx$ , onde  $w(x)$  é uma função de ponderação ou peso e  $\mathcal{G}\{f(x), \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots, \frac{d^k f}{dx^k}, x\}$  é um funcional definido na **Classe de Funções**  $\mathcal{F}$ .

## Funcional Linear e Regra integral de Leibniz.

**Definição:** Se diz que  $\mathcal{J}$  é um **Funcional Linear** se satisfaz as propriedades:

$$\mathcal{J}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{J}\{f(x)\} + \mathcal{J}\{g(x)\}, \forall f(x), g(x) \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{J}\{\alpha f(x)\} = \alpha \mathcal{J}\{f(x)\}, \forall f(x) \in \mathcal{F} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ escalar.}$$

Exemplo de Funcional Linear:  $\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  é um funcional linear no espaço de funções contínuas.

**Definição:** Um **Funcional Linear**  $\mathcal{J}$  é **Limitado** se existe um número  $0 < M \in \mathbb{R}$  tal que  $|\mathcal{J}\{f(x)\}| \leq M \|f(x)\|$ ,  $\forall f(x) \in \mathcal{F}$ , onde  $\|f(x)\|$  denota a norma do vetor  $f(x)$ .

**Regra integral de Leibniz:** (Derivada sob o sinal de Integral Definida) Considere  $t \in \mathbb{R}$  como sendo um parâmetro, as funções  $f(x, t)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$  contínuas ( $f(x, t) \in C^1$ ), e as funções  $a(t)$ ,  $b(t)$  contínuas em  $\mathbb{R}$  ( $C^1$ ), então se verifica

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt}.$$

Como  $a(t)$  e  $b(t)$  são funções de uma variável,  $\frac{da}{dt}$  e  $\frac{db}{dt}$  são a derivada total ou ordinária. Como  $f(x, t)$  é uma função de duas variáveis,  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$  é a derivada parcial em relação a  $t$  mantendo constante  $x$ .

## Analogias para o Cálculo Variacional ou de Variações.

No Cálculo para função de uma variável real  $y = f(x)$  se estuda como encontrar os **Máximos e Mínimos Relativos e Absolutos** (Extremos Relativos e Absolutos) desta função no intervalo  $[a, b]$ .

**Teorema:** (Condição Necessária para a existencia de **Extremos Relativos**) Se  $f(x)$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  e em  $x_0 \in [a, b]$  existe um ponto de extremo relativo (máximo ou mínimo), então  $f'(x_0) = 0$  ou  $f'(x_0) = \nexists$  não existe.

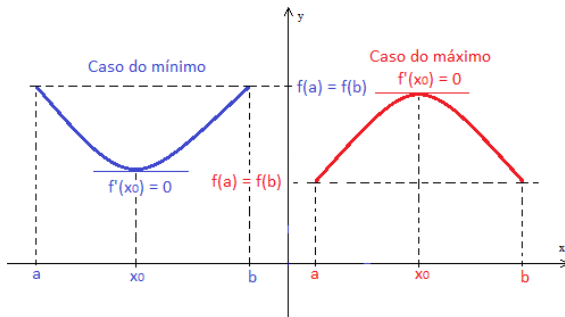


Figura: Representação geométrica de Extremos Relativos.

## Calculo Variacional ou de Variações.


De forma análoga ao caso de função, no **Calculo Variacional** o problema básico consiste em encontrar a curva  $y = f(x)$  tal que o funcional  $\mathcal{J}$  tenha um extremo (máximo, mínimo ou ponto de sela). Isto é, seja  $\mathcal{G}\{f(x), \frac{df}{dx}, x\}$  um funcional definido para a **Classe de Funções**  $\mathcal{F}$ , e considere o funcional

$$\mathcal{J}\{f(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{G}\{f(x), \frac{df(x)}{dx}, x\} dx. \quad (1)$$

A pergunta a ser respondida é: **Qual é a curva  $y = f(x)$  de Classe  $C^2$  com valores nos extremos do intervalo  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$  (limites de integração) fixados, tal que o funcional  $\mathcal{J}$  tenha um extremo?**

Para resolver este problema é necessário ir variando a função  $y = f(x)$  para outras que estão próximas até encontrar um valor mínimo ou máximo de  $\mathcal{J}$ , mantendo-se os limites de integração fixos.

**Método:** Uma maneira consiste em criar um parâmetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  e construir uma família de curvas  $f(x, \alpha) = f(x) + \alpha\eta(x)$  tal que as funções  $\eta(x)$  também são de **Classe  $C^1$**  e verificam  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Esta última restrição garante que todas as curvas que pertencem à família de curvas  $f(x, \alpha)$  satisfazem os valores fixados nos extremos do intervalo. Notem que  $\alpha \approx 0$  implicam em curvas muito próximas de  $y = f(x)$ . No limite quando  $\alpha \rightarrow 0$  obtemos a curva que garante o valor extremo para o funcional  $\mathcal{J}$ .

Notem também que  $f(x, \alpha) - f(x) = \alpha\eta(x) = \delta f(x)$  (**variação de  $f$  no ponto  $x$  mantido fixo**) e  $f'(x, \alpha) - f'(x) = \alpha\eta'(x) = \delta f'(x)$  (**variação de  $f'$  no ponto  $x$  mantido fixo**). 

## Calculo Variacional ou de Variações.

Agora considere o funcional  $\mathcal{J}$  para esta família de curvas

$$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}\{f(x, \alpha)\} = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{G}\left\{f(x, \alpha), \frac{df(x, \alpha)}{dx}, x\right\} dx.$$

Note que  $\mathcal{J}(\alpha)$  é uma função de  $\alpha$ , e podemos fazer a expansão dele em Série de Taylor em torno do ponto  $\alpha = 0$ .

$$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}(0) + \left. \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathcal{J}}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots.$$

Desprezando os termos com potência de  $\alpha$  maior que 1 segue

$$\mathcal{J}(\alpha) - \mathcal{J}(0) = \delta\mathcal{J} = \left. \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha = 0.$$

Consequentemente, a variação do funcional  $\delta\mathcal{J}$  será zero para qualquer valor de  $\alpha$  somente se  $\left. \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  (Condição Necessária para a Existência de Extremo).

Usando a Regra de Leibniz e considerenado que  $\frac{dx_1}{d\alpha} = 0$  e  $\frac{dx_2}{d\alpha} = 0$  obtemos

$$\frac{d\mathcal{J}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{G}\{f(x, \alpha), f'(x, \alpha), x\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial \alpha} \right] dx = 0.$$

Como  $f(x, \alpha) = f(x) + \alpha\eta(x)$  e  $f'(x, \alpha) = f'(x) + \alpha\eta'(x)$ , então  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \eta(x)$  e  $\frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx} = \eta'(x)$ . Logo

## Cálculo Variacional ou de Variações.

$$\frac{d\mathcal{J}(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right] dx = 0. \quad (2)$$

Usando Integração por Parte no segundo termo segue

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \frac{d\eta(x)}{dx} dx = \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \right] \eta(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \right] \eta(x) dx, \quad (3)$$

já que  $\left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} [\eta(x_2) - \eta(x_1)] = 0$ . Substituindo a Eq. 3 na Eq. 2 obtemos

$$\frac{d\mathcal{J}(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} \right] \eta(x) dx = 0. \quad (4)$$

Lembrando que  $\eta(x) \in C^1$  é uma função arbitrária, e que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , então a Eq. 4 é satisfeita se e somente se

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} = 0 \text{ para } \alpha = 0 \text{ ou } y = f(x, 0) = f(x) \text{ (Equação de Euler-Lagrange)}. \quad (5)$$

Logo, resolver o problema definido pela Eq. 1 é equivalente a resolver a EDP da Eq. 5.

# Tópicos

- 1 Elementos do Cálculo Variacional
  - Definições Necessárias
- 2 Exemplos de Aplicação
  - **Menor Distância**
  - A Catenóide e Catenária
  - A Braquistócrona

## Curva Plana de Menor Comprimento entre Dois Pontos.

**Problema:** Dado dois pontos no plano  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  encontre a curva  $y = f(x)$  com menor comprimento entre esses pontos? Note que o diferencial de comprimento do arco de uma curva  $y = f(x)$  é calculado como  $ds = \sqrt{1 + [y']^2} dx$ . Logo, o comprimento ( $L$ ) desta curva entre os dois pontos é calculado como

$$\mathcal{J} = L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y']^2} dx. \text{ Neste caso } \mathcal{G}\{f(x, \alpha), \frac{df(x, \alpha)}{dx}, x\} = \sqrt{1 + [y']^2}.$$

Para minimizar o funcional  $\mathcal{J}$ , resolveremos a EDP definida pela Eq. 5. Como  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1 + [f']^2}}$ , a Eq. de Euler é

$$0 - \frac{d}{dx} \left[ \frac{f'}{\sqrt{1 + [f']^2}} \right] = 0 \text{ ou } \frac{f''}{(1 + [f']^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow f'' = 0 \Rightarrow f(x) = c_1 x + c_2.$$

Portanto, a curva é uma reta cujos coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são determinados usando os dois pontos do extremo do intervalo:  $c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  e  $c_2 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$ .

# Tópicos

- 1 Elementos do Cálculo Variacional
  - Definições Necessárias
- 2 Exemplos de Aplicação
  - Menor Distância
  - A Catenóide e Catenária
  - A Braquistócrona

## Curva Plana (Catenária) com Superfície de Revolução de Mínima Área (Catenóide).

**Problema:** Dado dois pontos no plano  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  encontre a curva  $y = f(x)$  que gera uma superfície de revolução em torno do eixo  $Y$  com menor área entre esses pontos? Note que o diferencial de área do arco da curva  $y = f(x)$  é calculado como a área de um cilindro infinitesimal com raio  $x$  e altura  $ds = \sqrt{1 + [y']^2} dx$ . Logo, o diferencial de área é  $dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + [y']^2} dx$ , e a área total ( $A$ ) entre os dois pontos é calculada como

$$\mathcal{J} = A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + [y']^2} dx. \text{ Neste caso } \mathcal{G}\{f(x, \alpha), \frac{df(x, \alpha)}{dx}, x\} = 2\pi x \sqrt{1 + [y']^2}.$$

Para minimizar o funcional  $\mathcal{J}$ , resolveremos a EDP definida pela Eq. 5. Como  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f} = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial f'} = \frac{2\pi x f'}{\sqrt{1 + [f']^2}}$ , a Eq. de Euler é

$$0 - \frac{d}{dx} \left[ \frac{2\pi x f'}{\sqrt{1 + [f']^2}} \right] = 0 \text{ ou } \frac{2\pi x f'}{\sqrt{1 + [f']^2}} = c_1 \Rightarrow f' = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 - c_1^2}} \Rightarrow$$

$$f = \int \frac{c_1}{\sqrt{x^2 - c_1^2}} dx + c_2 \text{ tabelada ou resolvida fazendo } x = c_1 \cosh(u) \Rightarrow y = c_1 u + c_2.$$

Assim,  $x = c_1 \cosh\left(\frac{y - c_2}{c_1}\right)$  ou  $y = c_1 \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{c_1}\right)$  chamada de **catenária**, que descreve uma corda flexível pendurada pelos pontos de sustentação  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

# Tópicos

- 1 Elementos do Cálculo Variacional
  - Definições Necessárias
- 2 Exemplos de Aplicação
  - Menor Distância
  - A Catenóide e Catenária
  - A Braquistócrona

## Curva Plana com Tempo de Descida Mínimo de Uma Partícula.

**Problema:** Dado dois pontos no plano  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  ( $x_1 \neq x_2$  e  $y_1 > y_2$ ) encontre a curva  $y = f(x)$  que descreve a descida de uma partícula pela ação da gravidade (partindo do repouso, sem escorregar e sem atrito) em menor tempo?

Como a única força atuante é a gravidade (conservativa), então a Energia Total se conserva. Isto é,  $E = T + U = cte = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$ , onde o sistema de coordenadas tem sua origem no ponto  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  e o eixo  $y$  está orientado para abaixo.

Portanto, em qualquer ponto  $(x, y)$  a energia total é a mesma. No ponto  $(x_1, y_1)$  a partícula está em repouso  $v^2 = 0$  e  $y_1 = 0$ , logo  $E = 0$ . Assim,  $0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$  ou  $v = \sqrt{2gy}$  para qualquer outro ponto. Além disto,  $v = \frac{ds}{dt}$ , onde  $ds = \sqrt{1 + [y']^2} dx$  é o diferencial do arco de comprimento da curva. Assim, o diferencial de tempo é  $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+[y']^2} dx}{\sqrt{2gy}}$ . O tempo total para que a partícula percorra toda a curva é

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+[y']^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+[y']^2}{y}} dx = \mathcal{J}.$$

$$\text{Neste caso } \mathcal{G}\left\{f(x, \alpha), \frac{df(x, \alpha)}{dx}, x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+[y']^2}{y}}.$$

Para minimizar o funcional  $\mathcal{J}$ , resolveremos a EDP definida pela Eq. 5 (Equação de Euler-Lagrange).

## Curva Plana com Tempo de Descida Mínimo de Uma Partícula.

Como  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = -\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{1+[y']^2}{2gy}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+[y']^2)}}$  e

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y'} \right] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+[y']^2)}} \right] = \frac{y''}{\sqrt{2gy(1+[y']^2)}^{\frac{3}{2}}} - \frac{[y']^2}{2y\sqrt{2gy(1+[y']^2)}}.$$

A Eq. de Euler é

$$-\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{1+[y']^2}{2gy}} - \frac{y''}{\sqrt{2gy(1+[y']^2)}^{\frac{3}{2}}} + \frac{[y']^2}{2y\sqrt{2gy(1+[y']^2)}} = 0$$

Multiplicando esta equação por  $\sqrt{2gy}(1+[y']^2)^{\frac{3}{2}}$  obtemos

$$y'' - \frac{[y']^2}{2y}(1+[y']^2) = -\frac{1}{2y}(1+[y']^2)^2 \text{ ou } \frac{y''}{1+[y']^2} = -\frac{1}{2y}. \quad (6)$$

Conhecendo a identidade  $\frac{1}{2y'} \frac{d}{dx} [\ln(1+[y']^2)] = \frac{y''}{1+[y']^2}$  e usando a Eq. 6 obtemos

$$\frac{1}{2y'} \frac{d}{dx} [\ln(1+[y']^2)] = -\frac{1}{2y} \text{ ou } \frac{d}{dx} [\ln(1+[y']^2)] = -\frac{y'}{y} = -\frac{d}{dx} [\ln(y)] \text{ ou}$$

$$\frac{d}{dx} [\ln(1+[y']^2)] + \frac{d}{dx} [\ln(y)] = \frac{d}{dx} [\ln((1+[y']^2)y)] = 0 \Rightarrow (1+[y']^2)y = c \text{ (const)}$$

$\Rightarrow y = \frac{c}{1+[y']^2}$ . Cujas solução pode ser encontrada na forma paramétrica fazendo

$$y' = \cot(t) \Rightarrow y = \frac{c}{1+[\cot(t)]^2}. \text{ Conhecendo a identidade } \frac{1}{1+[\cot(t)]^2} = \sin^2(t) \text{ e}$$

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2t)] \text{ segue } \frac{1}{1+[\cot(t)]^2} = \frac{1}{2}[1 - \cos(2t)].$$

## Curva Plana com Tempo de Descida Mínimo de Uma Partícula.

Portanto,  $y(t) = \frac{c}{2}[1 - \cos(2t)]$ . Agora falta encontrar  $x$  em função do parâmetro  $t$ .

Como  $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$ . Já que  $y = c\text{sen}^2(t)$  segue que  $dy = 2c\text{sen}(t)\cos(t)dt$  e usando  $y' = \cot(t)$  obtemos  $dx = \frac{2c\text{sen}(t)\cos(t)dt}{\cot(t)} = 2c\text{sen}^2(t)dt = c[1 - \cos(2t)]dt$ , que após integrada resulta em  $x = \bar{c} + \frac{c}{2}[2t - \text{sen}(2t)]$ , onde  $\bar{c}$  é uma constante. Se  $t = 0$  corresponde a  $x_1 = 0$ , logo  $\bar{c} = 0$ . E assim obtemos a curva procurada (Braquistócrona) descrita em forma paramétrica

$$\text{(Braquistócrona} \Rightarrow \text{Cicloide)} \begin{cases} x(\theta) = a[\theta - \text{sen}(\theta)] \\ y(\theta) = a[1 - \cos(\theta)] \end{cases}, \quad (7)$$

onde  $a = \frac{c}{2}$  e  $\theta = 2t$ .

**Cicloide:** é a curva descrita pelo ponto fixo de uma circunferência de raio  $a$  que rola sem escorregar sobre uma reta, onde  $\theta$  é o ângulo que forma o segmento do raio do círculo a medida que vai rolando. A braquistócrona corresponde a uma cicloide invertida (Animação).

Para encontrar o valor da constante  $a$  se usa o ponto  $(x_2, y_2)$ . Isto é,  $x_2 = a[\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)]$  e  $y_2 = a[1 - \cos(\theta_2)]$ , resultando num sistema de duas equações não lineares que pode ser resolvido por métodos numéricos.