Mecânica Clássica e Quântica

Gustavo Benitez Alvarez

Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
Universidade Federal Fluminense

2026 - Notas de Aula: Aula 5

Tópicos

Tópicos

Alguns Dados Históricos.

A ideia foi aperfeiçoada com o passar do tempo por novos pensadores.

Heron de Alexandria (10 - 80 dC). Princípio do Caminho Mais Curto: Ao se refletir em um espelho, a luz percorre o caminho mais curto possível entre o ponto de origem e o ponto de destino. Como consequência segue que o ângulo de incidência deve ser igual ao ângulo de reflexão.

Pierre de Ferma (1662). Princípio do Tempo Mínimo: A luz, ao viajar entre dois pontos, segue a trajetória que leva o menor tempo possível. Como consequência se verifica a propagação retilínea da luz na reflexão e refração.

Pierre Louis Maupertuis (1744). Princípio de Mínima Ação: A quantidade de ação ($\mathcal{A}$) necessária para que qualquer mudança seja feita pela natureza é sempre a menor possível.
$\mathcal{J} = \mathcal{A} = \int_{r_i}^{r_f} m\vec{v} \cdot d\vec{r}$, onde a integral é calculada ao longo da trajetória da partícula.

Leonhard Euler (1744). Princípio de Mínima Ação: O caminho de uma partícula que viaja entre dois pontos fixos corresponde ao Mínimo de $\tilde{\mathcal{A}} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{v} \cdot d\vec{r}$. Caso particular de Maupertuis, porém usa cálculo variacional. Usa trajetórias ou caminhos virtuais, os quais são vizinhas à trajetória real da partícula.

Alguns Dados Históricos.

Joseph-Louis Lagrange (1760). Princípio Variacional: Mostra que as Leis de Newton são equivalentes ao Princípio de Mínima Ação junto com a lei de conservação de energia (caminhos virtuais). Introduziu coordenadas generalizadas (q_i), suas velocidades generalizadas ($\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$) e a Lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$, onde T é a energia cinética e U é a energia potencial do sistema. Obtendo assim a Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

Os princípios variacionais de Euler e Lagrange usam a ideia de caminhos virtuais de mesma energia. Hamilton eliminou essa restrição, considerando caminhos virtuais que terminam no mesmo ponto e no mesmo tempo.

Princípios Variacionais também são usados para desenvolver a mecânica quântica. A ideia central dos princípios variacionais consiste em supor que a natureza age sempre de maneira a otimizar uma certa grandeza física. Isto é, a natureza busca sempre o equilíbrio ótimo do sistema, o qual é obtido ao exigir que o funcional alcance seu valor de máximo ou mínimo (extremal).

Exemplos são as frases: *um sistema tende para o estado de mínima energia* ou *um sistema tende para o estado de máxima entropia*.

Tópicos

Princípio Variacional de Hamilton.

William Hamilton (1834). Princípio Variacional de Hamilton: Dentre todas as trajetórias possíveis conectando as coordenadas generalizadas iniciais $q_i(t_1)$ às finais $q_i(t_2)$ do sistema, a trajetória real corresponde aquela que torna nula a primeira variação da Ação $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2}(T - U)dt$.

No desenvolvimento de Halmiton não é necessário fazer uso de caminhos ou trajétorias virtuais para obter a Equação de Euler-Lagrange, as quais são obtidas repetendo o procedimento do cálculo variacional apresentado na Aula-4:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0.$$

Comparando as dimensões físicas do Princípio de Maupertuis e de Hamilton temos:

Maupertuis: $\mathcal{A} = \int_{r_i}^{r_f} m\vec{v} \cdot d\vec{r}$ dimensões de $\frac{[\text{massa}][\text{comprimento}]^2}{[\text{tempo}]}$.

Hamilton: $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2}(T - U)dt$ dimensões de $\frac{[\text{massa}][\text{comprimento}]^2}{[\text{tempo}]}$.

Equivalência entre o Princípio de Mínima Ação de Hamilton e as Leis de Newton.

O princípio de Hamilton só pode ser aplicado se as forças atuante no sistema são conservativas. Isto é, possam ser descritas por uma função potencial $\vec{F} = -\nabla U$.

Por simplicidade, considere uma única partícula num campo de força conservativo. Logo, $E = T + U$, onde $T = T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ é a energia cinética que só depende de velocidade $\dot{\vec{r}}$ e a energia potencial $U = U(\mathbf{r})$ só depende da posição $\vec{r}$.

No funcional Lagrangiano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r})$, o tempo t é a variável independente. Como as forças são conservativas $\mathcal{L}$ não depende explicitamente do tempo. Neste exemplo as coordenadas generalizadas coincidem com as coordenadas cartesianas da particula $q_i = r_i$ e $\dot{q}_i = \dot{r}_i$ com $i = 1, 2, 3$. Portanto, a Equação de Euler-Lagrange é:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial r_i} = 0$. Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i$ segue que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}_i) = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i$ que é a segunda Lei de Newton para a componente i do vetor força.

Resultado análogo é obtido se o sistema é formado por um número finito de partículas submetidas a forças conservativas. Isto porque o funcional Ação $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt$ é um **Funcional Linear**.

Tópicos

1. Princípios Variacionais da Mecânica Clássica
   - Princípio de Ação Mínima de Maupertuis
   - Princípio de Ação Mínima de Hamilton
2. Leis de Conservação ou Constantes de Movimento
   - Coordenadas Generalizadas e Momento Conjugado
   - Leis de Conservação

Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Generalizadas.

A **Mecânica Newtoniana** é formulada usando um sistema de referência com eixos cartesianos, onde o estado do sistema é determinado conhecendo sua posição $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ em cada instante de tempo t. Com frequência é conveniente fazer uma mudança de coordenadas para facilitar a resolução matemática do problema. Isto é, as coordenadas cartesianas podem ser trocadas por coordenadas curvilíneas como as coordenadas polares, coordenadas cilíndricas, coordenadas esféricas ou outras.

A **Mecânica Clássica** é formulada usando um sistema de referência com coordenadas generalizadas q_i, onde o estado do sistema é determinado conhecendo estas coordenadas $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_N(t)$ em cada instante de tempo t, o qual é chamado de Espaço de Configuração. O sistema físico tem N graus de liberdades, e a cada grau de liberdade deve ser associado uma coordenada generalizada q_i. Quando as coordenadas generalizadas são escolhidas de tal forma que são independentes entre si, então o número de coordenadas generalizadas independentes coincide com o número de graus de liberdade do sistema.

Coordenadas Generalizadas: É o sistema de coordenadas curvilíneas q_i que determinam de maneira unívoca a configuração do sistema físico. O termo *generalizada* é usado para deixar claro que podem ser diferentes das tradicionais coordenadas cartesianas.

Momento Linear e Momento Generalizado Conjugado.

Na **Mecânica Newtoniana** o momento linear de uma partícula é definido como $\vec{p} = \frac{d(m\vec{r})}{dt} = (p_x, p_y, p_z)$ ou por componentes como $p_x = \frac{d(mx)}{dt}$, $p_y = \frac{d(my)}{dt}$ e $p_z = \frac{d(mz)}{dt}$. De maneira análoga se define o momento generalizado conjugado na mecânica clássica.

Na **Mecânica Clássica** o momento generalizado conjugado à coordenada generalizada q_i é definido como $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, onde $\mathcal{L} = T - U$ é a Lagrangiana do sistema. Note que, como caso específico para uma partícula se $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ e $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\vec{r})$, então $p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$, $p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_y$ e $p_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z$.

Coordenada Generalizada Cíclica: Se diz que a coordenada generalizada q_i é cíclica se a Lagrangiana do sistema $\mathcal{L}$ não dependen desta coordenada, ou seja, se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$.

Note que as coordenadas cíclicas tem implicações para as Equações de Euler-Lagrange:
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ ou $\frac{d}{dt}(p_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$. Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ coordenada cíclica, então $\frac{d}{dt}(p_i) = 0$ seu momento conjugado é uma constante de movimento.

Tópicos

1. Princípios Variacionais da Mecânica Clássica
   - Princípio de Ação Mínima de Maupertuis
   - Princípio de Ação Mínima de Hamilton
2. Leis de Conservação ou Constantes de Movimento
   - Coordenadas Generalizadas e Momento Conjugado
   - Leis de Conservação

Coordenadas Generalizadas Cíclicas e Leis de Conservação.

Note que a Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ é função das coordenadas generalizadas q_i, das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ e do tempo t. Se a coordenada q_k é cíclica, então seu momento conjugado p_k se conserva. Dito de outra forma, é invariante com o tempo.

Se a Lagrangiana não dependente da coordenada generalizada q_k, as equações de movimento do sistema não se alteram se deslocamentos arbitrários ao longo dessa coordenada são realizados. Dito de outra forma, existe simetria do sistema para estas transformações da coordenada generalizada q_k, ou, o sistema é invariante para estas transformações da coordenada generalizada q_k.

Assim, na Mecânica Clássica as Leis de Conservação são associadas à simetrias da Lagrangiana.

Conservação do Momento Linear está associado à **simetria de translação**.

Conservação do Momento Angular está associado à **simetria de rotação**.

Conservação da Energia está associada à **simetria de translação no tempo**.

Conservação do Momento Linear no Problema de Kepler.

Problema de Kepler: Considere o problema de interação gravitacional entre duas partículas pontuais com massa m_1 e m_2 (sistema Sol-Terra ou Terra-Lua $\Leftarrow$ Aula-3).

Se usamos como coordenadas generalizadas as coordenadas cartesianas $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, então a Lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, t) = \left[\frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}_2)^2\right] - U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|).$$

Note que nestas coordenadas não existem coordenadas cíclicas, já que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \neq 0$ para todas as componentes de $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Porém, a Lagrangiana muda se usarmos como coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{R} = \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (coordenadas do Centro de Massa) e $(q_4, q_5, q_6) = \mathbf{r} = \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (coordenadas relativas entre as partículas):

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \left[\frac{1}{2} M (\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{\mathbf{r}})^2\right] - U(|\mathbf{r}|),$$

onde $M = m_1 + m_2$ (Massa Total) e $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (Massa Reduzida).

As coordenadas $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ são cíclicas porque $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_i} = 0$. Logo, seu momento conjugado $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ é constante: $\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M\dot{\mathbf{R}} = const$.

Conservação do Momento Linear e Simetria de Translação na Lagrangiana.

Para estas coordenadas generalizadas o Momento Conjugado $\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M\dot{\mathbf{R}}$ $= m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = const$ coincide com o Momento Linear Total do sistema.

Se é feita uma translação apenas do Centro de Massa $\mathbf{R} \to \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$ e $\mathbf{r} \to \mathbf{r}$, então

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \left[\frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2\right] - U(|\mathbf{r}|) \to \mathcal{L}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

A Lagrangiana do sistema é simetrica (invariante) para esta translação, mostrando que o deslocamento do Centro de Massa do sistema não altera sua dinâmica, o que implica na conservação do Momento Linear Total!

Note que pelas equações das transformações de coordenadas temos:

$$\text{Novas}\begin{cases} \mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{Cartesianas}\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \dfrac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \dfrac{m_1}{M}\mathbf{r} \end{cases}$$

Logo, a translação do Centro de Massa implica em novas $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{R}$ e $\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{R}$, ou seja, cada partícula é deslocada na mesma quantidade. Porém, suas coordenadas relativas não se alteram $\mathbf{r} \to [\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{R}] - [\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{R}] = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$.

Conservação da Energia Total e Simetria de Translação no tempo da Lagrangiana.

Considere o **Problema de Kepler** e o funcional $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ definido como

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \text{ Se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \text{ então } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} \text{ é conservada.}$$

Sabendo que a derivada total com respeito ao tempo para qualquer função $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ é

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] \text{ aplicando isto a } \mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \text{ acima segue}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\left[\ddot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right]\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \left[\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}}_{=0 \text{ Euler-Lagrange}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \text{ Se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \text{ então } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Como $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \left[\frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2\right] - U(|\mathbf{r}|)$, então $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ (coordenadas $\mathbf{R}$ e $\mathbf{r}$).

Conservação da Energia Total e Simetria de Translação no tempo da Lagrangiana.

O mesmo resultado é valido para as coordenadas cartesianas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, já que

$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, t) = \left[\frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2\right] - U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$, então $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

Se é feita uma translação apenas no tempo $t \to t + \Delta t$, então

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \left[\frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{\mathbf{r}})^2\right] - U(|\mathbf{r}|) \to \mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t + \Delta t) = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

A Lagrangiana do sistema é simetrica (invariante) para uma translação no tempo, implicando em $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. O funcional $\mathcal{E}$ frequentemente é chamado de **Integral de Jacobi** e para o Problema de Kepler coincide com a **Energia Total** do sistema.

Note que $\mathcal{E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, t) = \sum_{j=1}^{6} \dot{r}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_j} - \mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, t)$, como U não depende de $\dot{r}_j$ segue que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}_j} + \frac{\partial T_2}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}_j}\left[\frac{1}{2}m_1\left(\sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\sum_{i=4}^{6} \dot{r}_i^2\right)\right] \Rightarrow$
$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}_j} = m_1 \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i \delta_{ij}$ se $j = 1, 2, 3$ ou $\frac{\partial T_2}{\partial \dot{r}_j} = m_2 \sum_{i=4}^{6} \dot{r}_i \delta_{ij}$ se $j = 4, 5, 6$.
Portanto,
$\sum_{j=1}^{6} \dot{r}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_j} = \sum_{j=1}^{3} \dot{r}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}_j} + \sum_{j=1}^{3} \dot{r}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{r}_j} = \sum_{j=1}^{3} \dot{r}_j m_1 \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i \delta_{ij} + \sum_{j=4}^{6} \dot{r}_j m_2 \sum_{i=4}^{6} \dot{r}_i \delta_{ij}$
$= \sum_{j=1}^{3} m_1 \dot{r}_j^2 + \sum_{j=4}^{6} m_2 \dot{r}_j^2 = 2T$. Logo, $\mathcal{E} = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U$
Energia Total do sistema!