GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

TERCEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo Diferencial e Integral Aplicado II

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ______________________________

[01] Para cada uma das integrais duplas abaixo, faça um esboço do desenho da região de integração correspondente e, em seguida, calcule o valor da integral.

(a) (1.5) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx.$

Solução. A região de integração é apresentada na Figura (1).

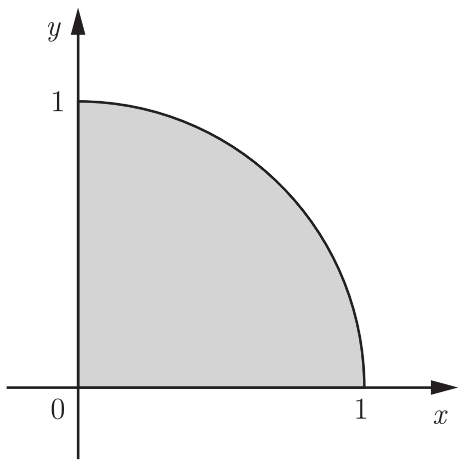

Figura 1: Região de integração do item (a) da questão [01].

Usaremos coordenadas polares para calcular o valor da integral. Note que, para os pontos da região de integração, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ e $0 \leq r \leq 1$. Desta maneira,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{\left(r^2\right)}\, r\, drd\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{e^{\left(r^2\right)}}{2}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{e-1}{2}\, d\theta = \frac{(e-1)\,\pi}{4}.\end{aligned}$$

(b) (2.0) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^{1/3}}^1 \frac{4}{y^4+1}\, dydx.$

Solução. A região de integração é apresentada na Figura (2). Para calcular a integral dupla, vamos primeiro trocar a ordem das integrais iteradas. Note que, para os pontos da região de integração, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq y^3$. Desta maneira,

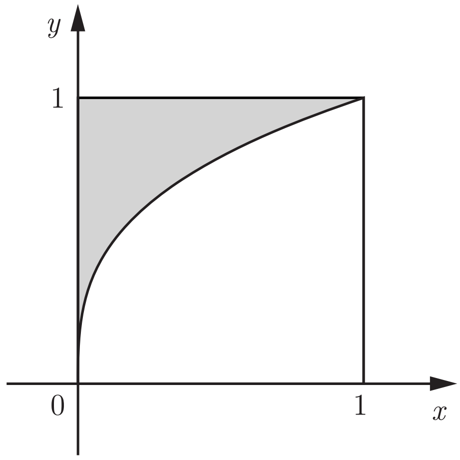

Figura 2: Região de integração do item (b) da questão [01].

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^{1/3}}^1 \frac{4}{y^4+1}\,dydx &= \int_0^1\int_0^{y^3} \frac{4}{y^4+1}\,dxdy = \int_0^1 \frac{4\,y^3}{y^4+1}\,dy \\ &= \left[\ln(y^4+1)\right]\Big|_{y=0}^{y=1} = \ln(2).\end{aligned}$$

[02] Seja S o sólido interior formado pelos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem simultaneamente as desigualdades

$$x^2+y^2 \leq 1, \quad z \geq -\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad z \leq +\sqrt{x^2+y^2}.$$

(a) (0.5) Faça um esboço do desenho da região S.

Solução. A região de integração é apresentada na Figura (3).

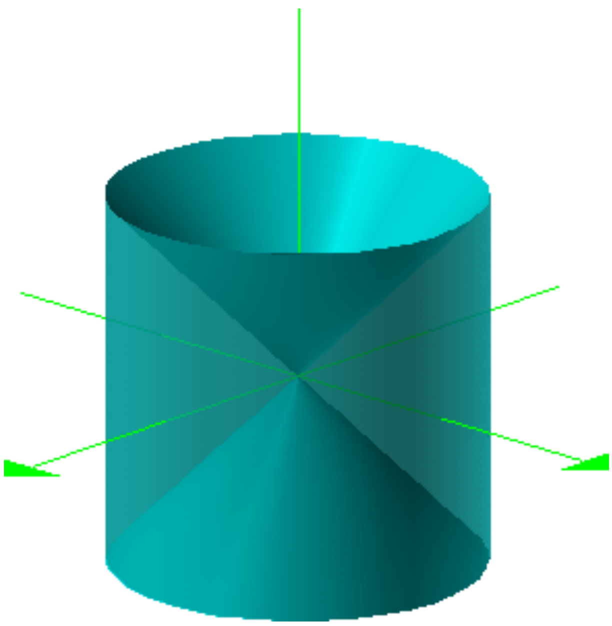

Figura 3: Região de integração do item (a) da questão [02].

(b) (1.0) Escreva o volume de S usando integrais triplas iteradas em coordenadas cilíndricas. Não é preciso calcular as integrais!

Solução. Em coordenadas cilíndricas, o volume de S é dado por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-r}^{+r} r \, dz dr d\theta.$$

(c) (2.0) Escreva o volume de S usando integrais triplas iteradas em coordenadas esféricas. Não é preciso calcular as integrais!

Solução. Em coordenadas esféricas, o volume de S é dado por

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\operatorname{cossec}(\phi)} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho d\phi d\theta.$$

(d) (1.0) Calcule o volume de S usando integrais triplas. Você pode escolher o sistema de coordenadas que melhor lhe convier.

Solução. Usaremos coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido S:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-r}^{+r} r \, dz dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Big[rz \Big]\Big|_{z=-r}^{z=+r} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\, r^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2\, r^3}{3} \right]\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \, d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

[03] (1.0) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local da função

$$z = x^2 + (1 - x)^3 y^2$$

em $D = \mathbb{R}^2$. Ele é ponto de mínimo global? Justifique a sua resposta!

Solução. Note que f é de classe C^∞ (pois f é uma função polinomial) e que $\mathbf{p} = (0, 0)$ é um ponto interior de $D = \mathbb{R}^2$. Mais ainda, $\mathbf{p}$ é um ponto crítico de f, pois

$$\nabla f(0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \big(2\, x - 3\, (1 - x)^2 y^2, 2\, (1 - x)^3 y \big) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0).$$

Como

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = \left| \begin{vmatrix} 2 + 6\ (1 - x)\ y^2 & -6\ (1 - x)^2\ y \\ & \\ -\, 6\ (1 - x)^2\ y & 2\ (1 - x)^3 = \end{vmatrix} \right|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 + 6\, (1 - x) y^2 \Big|_{(x,y)=(0,0)} = 2 > 0$$

segue-se que $\mathbf{p} = (0,0)$ é um ponto de mínimo local de f em $D = \mathbb{R}^2$. Observe, contudo, que o ponto $\mathbf{p} = (0,0)$ *não é* um ponto de mínimo global, pois

$$\lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 + (1-x)^3\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - 3\,x + 4\,x^2 - x^3\right) = -\infty.$$

[04] (1.0) Use o teorema dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que $\mathbf{p} = (1,1)$ *não é* ponto de máximo global de $z = f(x,y) = 999\,x + 1000\,y$ sujeito à restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 = 2$.

Solução. Note que f e g são funções de classe C^∞ (pois f e g são funções polinomiais) e que $\mathbf{p} = (1,1)$ satisfaz a condição de regularidade, dado que

$$\nabla g(1,1) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)\right) = (2\,x, 2\,y)\Big|_{(x,y)=(1,1)} = (2,2) \neq (0,0).$$

Se $\mathbf{p} = (1,1)$ fosse um ponto de máximo global de $z = f(x,y) = 999\,x + 1000\,y$ sujeito à restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 = 2$, então, pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, deveria existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1), \end{cases}$$

isto é, deveria existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $999 = 2\,\lambda$ e, ao mesmo tempo, $1000 = 2\,\lambda$. Como isto é impossível, segue-se que $\mathbf{p} = (1,1)$ *não é* um ponto de máximo global de $z = f(x,y) = 999\,x + 1000\,y$ sujeito à restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 = 2$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 02/07/2007.